PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
David Schmitz

Sommersemester 2010

Aufgaben zur Analysis I – Blatt 5

Abgabe am Freitag, 21.05.2010, 10:00-10:10 Uhr vor HG 5

Aufgabe 20: Grenzwerte von Folgen *(4 Punkte)*

Beweisen Sie folgende nützliche Aussagen:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{n}} = 0$ für $k \in \mathbb{N}$ fest.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Anleitung: Zeigen Sie, dass für $n \geq 2$ und $x \geq 0$ die Ungleichung $(1+x)^n \geq \frac{n^2}{4}x^2$ gilt und folgern Sie weiter für $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung: $\sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$.

Aufgabe 21: Konvergente Folgen *(4 Punkte)*

(a) Zeigen Sie: Ist (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert a, so konvergiert auch die Folge der Beträge $(|a_n|)$ und der Grenzwert ist $|a|$. Gilt auch die Umkehrung?

(b) Seien (a_n), (b_n) und (c_n) reelle Zahlenfolgen und es gelte $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner seien (a_n) und (b_n) konvergent mit dem gemeinsamen Grenzwert c. Zeigen Sie: Die Folge (c_n) konvergiert ebenfalls gegen c.

Aufgabe 22: Cauchykriterium für Folgen *(4 Punkte)*

Wir betrachten die durch

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{2+a_n}{1+a_n}$$

rekursiv definierte reelle Zahlenfolge.

(a) Zeigen Sie, dass $1 \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $|a_m - a_n| \leq \frac{1}{4} \cdot |a_{m-1} - a_{n-1}|$ für alle natürlichen Zahlen $m, n \geq 2$ gilt.

(c) Folgern Sie, dass die Folge (a_n) konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 23: Bestimmte Divergenz *(4 Punkte)*

Seien (a_n) und (b_n) zwei reelle Zahlenfolgen, die bestimmt gegen ∞ divergieren, und (c_n) eine Nullfolge. Beweisen Sie:

(a) Die Folge $(a_n + b_n)$ ist bestimmt divergent gegen ∞.

(b) Die Folge $(a_n \cdot b_n)$ ist bestimmt divergent gegen ∞.

(c) Die Folge $(a_n + c_n)$ ist bestimmt divergent gegen ∞.

Finden Sie Beispiele für Folgen (a_n), die bestimmt gegen ∞ divergieren, und Nullfolgen (c_n), so dass

(d) die Folge $(a_n \cdot c_n)$ bestimmt gegen ∞ divergiert.

(e) die Folge $(a_n \cdot c_n)$ eine Nullfolge ist.

(f) die Folge $(a_n \cdot c_n)$ gegen ein vorgegebenes $r \in \mathbb{R}$ konvergiert.