PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
David Schmitz

Sommersemester 2010

Aufgaben zur Analysis I – Blatt 6

Abgabe am Freitag, 28.05.2010, 10:00-10:10 Uhr vor HG 5

Aufgabe 24: Rekursiv definierte Folgen *(4 Punkte)*

Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei wie folgt definiert:

$$a_1 := \frac{1}{4}, \quad a_{n+1} := a_n^2 + \frac{1}{4}.$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 25: Konvergenzkriterienfür Reihen *(6 Punkte)*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \cdot 3^n}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^{2n}}.$$

Aufgabe 26: Vertauschung von Summe und Grenzwert *(4 Punkte)*

Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{(n+k)(n+k+1)} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+k)(n+k+1)}.$$

(Finden Sie das Ergebnis überraschend?)

Hinweis: Für die Bestimmung des ersten der beiden Ausdrücke ist es günstig, zunächst eine *Partialbruchzerlegung* $\frac{1}{(n+k)(n+k+1)} = \frac{a}{n+k} + \frac{b}{n+k+1}$ mit geeigneten $a, b \in \mathbb{R}$ zu ermitteln.

Aufgabe 27: Harmonische Reihe *(2 Punkte)*

Bestimmen Sie eine natürliche Zahl N, so dass die N-te Partialsumme der harmonischen Reihe größer als 99 ist, d. h. es soll gelten

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > 99.$$