PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
David Schmitz

Sommersemester 2010

Aufgaben zur Analysis I – Blatt 7

Abgabe am Freitag, 04.06.2010, 10:00-10:10 Uhr vor HG 5

▸ **Aufgabe 28: Reihenendstücke** *(4 Punkte)*

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe. Zeigen Sie:

(a) Für alle natürlichen Zahlen n ist die Reihe $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ konvergent.

(b) Die Folge (r_n) mit $r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ ist eine Nullfolge.

Aufgabe 29: Doppelreihen *(2 Punkte)*

Wir betrachten die Doppelfolge $(a_{n,m})_{n,m\geq 2}$ mit $a_{n,m} := \frac{1}{m^n}$. Zeigen Sie, dass jede Anordnung der Doppelfolge $(a_{n,m})_{n,m\geq 2}$ in eine Reihe konvergiert, und berechnen Sie den Reihenwert.

Aufgabe 30: Cauchyprodukt *(2 Punkte)*

Sei q eine reelle Zahl mit $|q| < 1$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot q^n$$

konvergiert, und berechnen Sie den Reihenwert.

Hinweis: Betrachten Sie das Cauchyprodukt der geometrischen Reihe mit sich selbst.

Aufgabe 31: Rechen mit komplexen Zahlen *(4 Punkte)*

(a) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahl:

$$\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1}.$$

(b) Berechnen Sie den Betrag der folgenden komplexen Zahlen:

$$\text{(i)}\ \ \frac{4\mathrm{i}+3}{1-2\mathrm{i}}\,, \qquad \text{(ii)}\ \ \frac{1-n\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+n\mathrm{i}\sqrt{3}} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(c) Untersuchen Sie die folgenden Folgen komplexer Zahlen auf Konvergenz:

$$\text{(i)}\ \ c_n := \left(\frac{1-2\mathrm{i}}{4\mathrm{i}+3}\right)^n\,, \qquad \text{(ii)}\ \ d_n := \frac{1}{n} + \mathrm{i}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

(d) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit (c_n) aus Aufgabenteil c) auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

▸ **Aufgabe 32: Cauchykriterium für Folgen komplexer Zahlen** *(4 Punkte)*

(a) Zeigen Sie, dass für eine komplexe Zahl z die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\max\left(|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z|\right) \leq |z| \leq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|\ .$$

(b) Folgern Sie, dass eine komplexe Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann eine Cauchyfolge ist, wenn die reellen Folgen $(\mathrm{Re}\, z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mathrm{Im}\, z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen sind.