

Aufgaben zur Analysis I – Blatt 8

Abgabe am Freitag, 11.06.2010, 10:00-10:10 Uhr vor HG 5

► **Aufgabe 33: Wurzeln komplexer Zahlen** (4 Punkte)

Sei z eine komplexe Zahl. Zeigen Sie, dass eine komplexe Zahl w existiert, so dass $w^2 = z$.
Wie viele solche w existieren für ein vorgegebenes z ?

Aufgabe 34: Sinus und Cosinus hyperbolicus (5 Punkte)

Die hyperbolischen trigonometrischen Funktionen \sinh und \cosh sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\sinh : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \sinh(x) &:= \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)) \\ \cosh : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \cosh(x) &:= \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))\end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen x und y gilt:

$$(a) \quad \begin{aligned}\sinh(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cosh(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},\end{aligned}$$

$$(b) \quad \begin{aligned}\sinh(x+y) &= \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y), \\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y),\end{aligned}$$

$$(c) \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

Skizzieren Sie außerdem den Graph der beiden Funktionen.

► **Aufgabe 35: Einseitige Grenzwerte** (4 Punkte)

Sei $a, c, d \in \mathbb{R}$ mit $c < a < d$ und $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$.

Zeigen Sie: f konvergiert für $x \rightarrow a$ genau dann gegen $b \in \mathbb{R}$, wenn die beiden einseitigen Grenzwerte $\lim_{x \nearrow a} f(x)$ und $\lim_{x \searrow a} f(x)$ existieren und gleich b sind.

Aufgabe 36: Grenzwerte (4 Punkte)

Für welche Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{a}{4-x^2} \right) ?$$