

**Aufgaben zur Analysis I – Blatt 8**

Abgabe am Freitag, 11.06.2010, 10:00-10:10 Uhr vor HG 5

► **Aufgabe 33: Wurzeln komplexer Zahlen** (4 Punkte)

Sei  $z$  eine komplexe Zahl. Zeigen Sie, dass eine komplexe Zahl  $w$  existiert, so dass  $w^2 = z$ .  
Wie viele solche  $w$  existieren für ein vorgegebenes  $z$ ?

**Aufgabe 34: Sinus und Cosinus hyperbolicus** (5 Punkte)

Die hyperbolischen trigonometrischen Funktionen  $\sinh$  und  $\cosh$  sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\sinh : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \sinh(x) &:= \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)) \\ \cosh : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \cosh(x) &:= \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))\end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen  $x$  und  $y$  gilt:

- (a)  $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ,  
 $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ,
- (b)  $\sinh(x+y) = \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y)$ ,  
 $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$ ,
- (c)  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ .

Skizzieren Sie außerdem den Graph der beiden Funktionen.

► **Aufgabe 35: Einseitige Grenzwerte** (4 Punkte)

Sei  $a, c, d \in \mathbb{R}$  mit  $c < a < d$  und  $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Zeigen Sie:  $f$  konvergiert für  $x \rightarrow a$  genau dann gegen  $b \in \mathbb{R}$ , wenn die beiden einseitigen Grenzwerte  $\lim_{x \nearrow a} f(x)$  und  $\lim_{x \searrow a} f(x)$  existieren und gleich  $b$  sind.

**Aufgabe 36: Grenzwerte** (4 Punkte)

Für welche Werte des Parameters  $a \in \mathbb{R}$  existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{2-x} - \frac{a}{4-x^2} \right) ?$$