PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG Sommersemester 2010
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
David Schmitz

Aufgaben zur Analysis I – Blatt 9
Abgabe am Freitag, 19.06.2010, 10:00-10:10 Uhr vor HG 5

Aufgabe 37: Unstetige Grenzfunktion *(4 Punkte)*
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ werde eine Funktion $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_n(x) := \frac{nx}{1 + |nx|} \; .$$

(a) Begründen Sie, warum jede der Funktionen g_n auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.
Hinweis: Beweisen Sie zuerst die Stetigkeit der Betragsfunktion.
(b) Beweisen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ existiert.
(c) In welchen Punkten ist die durch $g(x) := \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ definierte Grenzfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig?

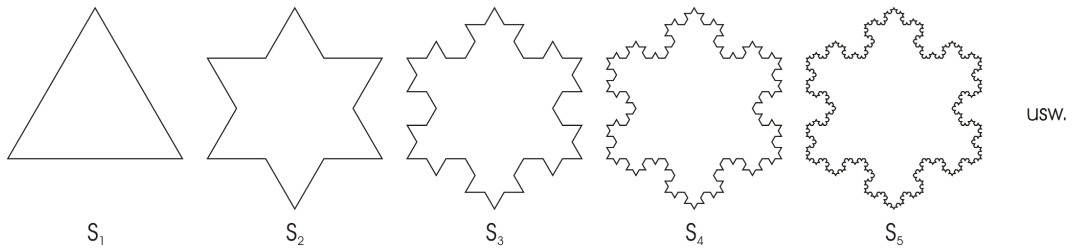
▸ **Aufgabe 38: Stetige Funktionen** *(4 Punkte)*
(a) Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit der Eigenschaft, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt. Zeigen Sie, dass dann $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
(b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass dann $f(x) = ax$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, wobei $a := f(1)$.
Hinweis: Zeigen Sie die Behauptung zunächst für alle $x \in \mathbb{N}$, dann für alle $x \in \mathbb{Z}$ und für alle $x \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 39: Ein Fixpunktsatz *(4 Punkte)*
Es sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f([0, 1]) \subset [0, 1]$. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat, d.h. dass es einen Punkt $x_0 \in [0, 1]$ mit $f(x_0) = x_0$ gibt.
Hinweis: Betrachten Sie $g(x) := f(x) - x$.

Aufgabe 40: Schneeflockenkurve *(4 Punkte)*
Die „Schneeflockenkurve“ entsteht in dem folgenden induktiven Konstruktionsverfahren: Wir beginnen mit einem gleichseitigen Dreieck S_1 der Seitenlänge 1. Jetzt dritteln wir jede Seite und errichten über dem Mittelstück jeder Seite ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge $\frac{1}{3}$. Wenn wir noch die Basis jedes der kleinen Dreiecke entfernen, erhalten wir den sechszackigen Stern S_2 (siehe Abbildung). In S_2 dritteln wir wieder alle geradlinigen Begrenzungsflächen, konstruieren (zwölf) kleinere Dreiecke und erhalten den achtzehnzackigen Stern S_3. So fortfahrend konstruieren wir Figuren $S_4, S_5, \ldots, S_n, \ldots$.



(a) Berechnen Sie den Flächeninhalt F_n der von der Figur S_n eingeschlossenen Fläche. (Hier dürfen Sie natürlich die elementargeometrische Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks benutzen und die Inhalte zusammengesetzter Flächen durch Addition berechnen.) Zeigen Sie, daß der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} F_n$ existiert und berechnen Sie ihn.

(b) Es sei U_n der Umfang der Figur S_n, d.h. die Länge ihrer Begrenzungskurve. (Zum Beispiel ist $U_1 = 3$.) Zeigen Sie, daß

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \infty$$

gilt. (Ist das nicht merkwürdig?)