PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG Sommersemester 2010
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
David Schmitz

Aufgaben zur Analysis I – Blatt 10

Abgabe am Freitag, 25.06.2010, 10:00-10:10 Uhr vor HG 5

Aufgabe 41: Zwischenwertsatz *(4 Punkte)*

Ein Läufer legt eine Strecke von 10 km zurück und benötigt dafür 30 Minuten. (Er benötigt für einen Kilometer also *durchschnittlich* 3 Minuten.) Zeigen Sie, dass es auf der Laufstrecke einen 2 km langen Abschnitt gibt, für den er genau 6 Minuten benötigt.

Anleitung: Sie dürfen annehmen, dass die Abbildung $f : [0, 30] \to [0, 10]$, die zu gegebenem Zeitpunkt t die zurückgelegte Laufstrecke $f(t)$ angibt, stetig und streng monoton wachsend ist. Betrachten Sie dann die Abbildung T, die für $x \in [0, 8]$ die Zeit $T(x)$ angibt, die der Läufer für die Strecke zwischen x und $x + 2$ benötigt, und wenden Sie den Zwischenwertsatz an.

Aufgabe 42: Differenzierbarkeit der Wurzelfunktion *(2 Punkte)*

Bestimmen Sie – nur unter Rückgriff auf die Definition der Differenzierbarkeit – in welchen Punkten $a \in \mathbb{R}_0^+$ die Wurzelfunktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

differenzierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung $f'(a)$.

Aufgabe 43: Gerade und ungerade Funktionen *(3 Punkte)*

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, falls $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Sie heißt *ungerade*, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(a) Drücken Sie die Eigenschaft gerade/ungerade mit Hilfe der Funktion $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x$, aus.

(b) Zeigen Sie, dass die Ableitung einer geraden (bzw. ungeraden) differenzierbaren Funktion ungerade (bzw. gerade) ist.

Aufgabe 44: Differenzierbarkeit *(4 Punkte)*

Zu vorgegebener natürlicher Zahl n betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \le 0 \\ x^n & \text{, falls } x > 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass diese Funktion $(n-1)$-mal differenzierbar ist, aber nicht n-mal, und berechnen Sie die Ableitungen $f^{(k)}$ für $1 \le k < n$.

Aufgabe 45: Höhere Ableitungen *(4 Punkte)*

Berechnen Sie die tausendste Ableitung $f^{(1000)}$ der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 \cdot e^x$.

Hinweis: Es kann nützlich sein, zunächst $p(x) := x^2$ zu setzen und in der Schreibweise $f(x) = p(x) \cdot e^x$ ein paar Ableitungen $f', f'', f''', f^{(4)}, f^{(5)}, \ldots$ auszurechnen, um zu einer Vermutung zu gelangen, die Sie dann beweisen.