PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
David Schmitz

Sommersemester 2010

Aufgaben zur Analysis I – Blatt 11

Abgabe am Freitag, 02.07.2010, 10:00-10:10 Uhr vor HG 5

▸ Aufgabe 46: Arithmetisches und geometrisches Mittel *(5 Punkte)*

Beweisen Sie die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

für alle positiven reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$. Zeigen Sie, dass Gleichheit nur dann eintreten kann, wenn $a_1 = \ldots = a_n$ ist.

Anleitung: Führen Sie eine Induktion nach n durch und untersuchen Sie im Induktionsschritt zu gegebenen $a_1, \ldots, a_n$ die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \left(\frac{a_1 + \ldots + a_n + x}{n+1}\right)^{n+1} - a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot x \end{aligned}$$

mit den Mitteln der Differentialrechnung auf Minima.

Aufgabe 47: Mittelwertsatz *(3 Punkte)*

(a) Ermitteln Sie für die Funktion $[0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$, explizit eine Stelle $c \in (0,1)$ mit der durch den Mittelwertsatz zugesicherten Eigenschaft. Fertigen Sie dazu eine Skizze an.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion an, bei der Sie den Punkt c, dessen Existenz durch den Mittelwertsatz garantiert wird, *nicht* ohne Weiteres bestimmen können.

▸ Aufgabe 48: Schrankensatz *(3 Punkte)*

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall I und sei $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $|f'(x)| \leq c$ für alle $x \in I$.

(ii) $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|$ für alle $x, y \in I$.

Aufgabe 49: Regel von de l'Hospital, schwache Version *(4 Punkte)*

Wir behandeln hier eine schwache Version der Regel von de l'Hospital: Sie hat stärkere Voraussetzungen als die Version, die wir in der Vorlesung behandelt hatten. (Überprüfen Sie, inwiefern.) Sie lässt sich dafür aber viel leichter beweisen.

(a) Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $f(a) = g(a) = 0$ und $g'(a) \neq 0$. Zeigen Sie, dass dann der Grenzwert

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existiert und gleich

$$\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

ist.

Tipp: Gehen Sie direkt von der Definition der Differenzierbarkeit aus, entweder mittels des Differenzenquotienten oder – noch bequemer – mittels der Charakterisierung, die wir anlässlich der Kettenregel gezeigt hatten.

(b) Geben Sie ein Anwendungsbeispiel für die schwache Version.

(c) Geben Sie ein Beispiel an, das sich mit der stärkeren Version (aus der Vorlesung) behandeln lässt, jedoch nicht mit der schwachen Version.

Aufgabe 50: Regel von de l'Hospital *(3 Punkte)*

(a) Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim\limits_{x \searrow 0}(\frac{1}{x}\ln(1+ax))$ für $a \in \mathbb{R}$ existiert und bestimmen Sie dessen Wert.

(b) Verwenden Sie das in Aufgabenteil a) gefundene Ergebnis, um den Grenzwert

$$\lim_{x \searrow 0} \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+ax)\right)$$

zu berechnen.