PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
David Schmitz

Sommersemester 2010

Aufgaben zur Analysis I – Blatt 12

Abgabe am Freitag, 09.07.2010, 10:00-10:10 Uhr vor HG 5

Aufgabe 51: Fehlersuche bei de l'Hospital *(4 Punkte)*

Erklären Sie, wo der Fehler bei der folgenden (falschen) Anwendung der Regel von de l'Hospital liegt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})}{1}.$$

Überlegen Sie sich dazu, dass der linke Limes gleich 0 ist, der rechte Limes aber nicht existiert; erläutern Sie, warum dies nicht im Widerspruch zur Regel von de l'Hospital steht.

▸ **Aufgabe 52: Gleichmäßige Konvergenz und Supremumsnorm** *(5 Punkte)*

(a) Es sei $D \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie für $f, g \in B(D, \mathbb{R})$ folgende Eigenschaften der Supremumsnorm:

(i) $\|f\| \geq 0$ mit „=“ genau dann, wenn $f = 0$ gilt.

(ii) $\|c \cdot f\| = |c| \cdot \|f\|$ für $c \in \mathbb{R}$.

(iii) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

(b) Sei $D \subset \mathbb{R}$ und seien $f_n, g_n : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, so dass die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ bzw. $g : D \to \mathbb{R}$ konvergieren. Beweisen Sie:

(i) Die Funktionenfolge $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f + g$.

(ii) Für eine beliebige reelle Zahl c konvergiert die Funktionenfolge $(c \cdot f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $c \cdot f$.

Aufgabe 53: Punktweise/Gleichmäßige Konvergenz *(6 Punkte)*

(a) Überprüfen Sie, ob bei den nachstehenden Funktionenfolgen punktweise oder gleichmäßige Konvergenz vorliegt (und geben Sie die Grenzfunktionen an):

(i) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,; \quad x \mapsto \exp(-n(x^2+1))$,

(ii) $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,; \quad x \mapsto (x + \frac{1}{n})^2$,

(iii) $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,; \quad x \mapsto \frac{nx}{1+|nx|}$

(b) Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,; \quad x \mapsto nx\exp(-nx^2).$$

Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf allen Intervallen $[a, b] \subset \mathbb{R}$, die nicht den Nullpunkt enthalten, gleichmäßig konvergiert, nicht aber auf ganz $\mathbb{R}$.

Aufgabe 54: Funktionenreihen *(3 Punkte)*

Zeigen Sie, dass durch $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\cdot x)}{n^3}$ eine differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$ definiert wird.