PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
D. Schmitz

Wintersemester 2011/2012

Aufgaben zur Elementaren Algebraischen Geometrie

Blatt 1

Abgabe am Dienstag, 25.10.2011 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Unterräume *(3 Punkte)*

Gegeben seien folgende Vektoren des $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten den Untervektorraum V des $\mathbb{R}^4$, der von den Vektoren v_1 und v_2 aufgespannt wird.

Finden Sie eine implizite Beschreibung für V, d. h. bestimmen Sie eine geeignete Matrix A, so dass gilt:

$$V = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}.$$

Aufgabe 2: Verbindungsräume *(3 Punkte)*

Seien $a_1, \ldots, a_k \in K^n$.

(a) Zeigen Sie:

$$\dim(a_1 \vee \ldots \vee a_k) = \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k \end{pmatrix} - 1.$$

(b) Finden Sie für die Bedingungen, dass die k Vektoren $a_1, \ldots, a_k$ affin unabhängig sind und dass die k Vektoren $a_1, \ldots, a_k$ auf einer Geraden liegen jeweils eine äquivalente Aussage über den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k \end{pmatrix}$$

und beweisen Sie diese.

Aufgabe 3: Affine Abbildungen *(3 Punkte)*

Es sei $F : K^n \longrightarrow K^n$ eine affine Abbildung. Dann gilt für jede Affinkombination
$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k \in K^n,\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$, die Gleichung

$$F(x) = \lambda_1 F(x_1) + \ldots + \lambda_k F(x_k).$$