PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
D. Schmitz

Wintersemester 2011/2012

Aufgaben zur Elementaren Algebraischen Geometrie

Blatt 4

Abgabe am Dienstag, 15.11.2011 vor der Vorlesung

Aufgabe 12: Punktspiegelungen *(4 Punkte)*

Die (Punkt-)Spiegelung am Punkt $c \in \mathbb{R}^n$ ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, die $x \in \mathbb{R}^n$ auf den Punkt $x' \neq x$ auf der Geraden xc abbildet, der denselben Abstand von c hat wie x.

(a) Beschreiben Sie die Abbildung f analytisch, das heißt durch eine Gleichung.

(b) Zeigen Sie, dass Punktspiegelungen Kongruenzabbildungen sind.

(c) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt punktsymmetrisch, falls eine Punktspiegelung $f \neq \mathrm{id}$ existiert mit $f(M) = M$.
Zeigen Sie, dass eine beschränkte Menge M höchstens ein Symmetriezentrum besitzt, d. h. dass höchstens eine Punktspiegelung $f \neq \mathrm{id}$ existiert mit $f(M) = M$.

Hinweis: Überlegen Sie sich, welche Art von Abbildung sich durch die Hintereinanderausführung zweier Punktspiegelungen ergibt.

Aufgabe 13: Zentrische Streckungen *(6 Punkte)*

(a) Formulieren Sie zwei äquivalente Definitionen der *zentrischen Streckung* $S_{p,\lambda} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit Zentrum $p \in \mathbb{R}^n$ und Streckungsfaktor $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und zwar
   (i) eine geometrische Definition, die zu gegebenem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ die Lage des Bildpunkts $S_{p,\lambda}(x)$ angibt, und
   (ii) eine analytische Definition, die zu $x \in \mathbb{R}^n$ den Bildpunkt $S_{p,\lambda}(x)$ durch einen Formelausdruck angibt.

(b) Inwiefern ist eine Punktspiegelung eine spezielle zentrische Streckung?

(c) Ist die mit einer affinen Transformation g konjugierte Abbildung $g^{-1}S_{p,\lambda}g$ wieder eine zentrische Streckung?

(d) Gegeben seien zwei Kreise $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie alle zentrischen Streckungen, die K_1 auf K_2 abbilden.

Aufgabe 14: Ähnlichkeitsabbildungen *(4 Punkte)*

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Ähnlichkeitsabbildung, falls ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$d(f(x), f(y)) = \lambda\, d(x, y).$$

Zeigen Sie:

(a) Die Ähnlichkeitsabbildungen sind genau die Abbildungen der Form $f(x) = Ax + b$ mit $A = \lambda B$ und $B \in O_n(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Ähnlichkeitsabbildungen im $\mathbb{R}^2$ sind winkelerhaltend.

(c) Ähnlichkeitsabbildungen im $\mathbb{R}^2$ bilden Kreise auf Kreise ab.

(d) Zentrische Streckungen sind Ähnlichkeitsabbildungen.