PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
D. Schmitz

Wintersemester 2011/2012

Aufgaben zur Elementaren Algebraischen Geometrie

Blatt 5

Abgabe am Dienstag, 22.11.2011 vor der Vorlesung

Aufgabe 16: Kongruenzabbildungen *(3 Punkte)*

Zeigen Sie:

(a) Wenn eine Kongruenzabbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ zwei verschiedene Fixpunkte besitzt, dann ist sie entweder die Identität oder eine (Achsen-)Spiegelung an der Verbindungsgerade der beiden Fixpunkte. Achsenspiegelungen sind von der Form

$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} (x-a) + a,$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ gilt und a ein Punkt auf der Spiegelachse ist.

(b) Es existieren genau zwei Kongruenzabbildungen, die zwei verschiedene Punkte $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$ auf zwei verschiedene Punkte $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^2$ mit gleichem Abstand abbilden, d. h. zu $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R}^2$ mit $d(p_1, p_2) = d(q_1, q_2)$ existieren genau zwei Kongruenzabbildungen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(p_1) = q_1$ und $f(p_2) = q_2$.

Aufgabe 17: Kreise *(3 Punkte)*

Es seien K_1, K_2, K_3 drei Kreise in $\mathbb{R}^2$ derart, dass sich je zwei davon in zwei verschiedenen Punkten schneiden. Für $i \neq j,\ 1 \leq i, j \leq 3$, sei $K_i \cap K_j = \{p_{ij}, q_{ij}\}$. Zeigen Sie, dass sich die drei Geraden $p_{ij} \vee q_{ij}$ in einem Punkt schneiden oder parallel sind.

Hinweis: Überlegen Sie sich wie sich die Gleichungen der Geraden aus den Kreisgleichungen ableiten lassen.

Aufgabe 18: Veronese-Abbildung *(3 Punkte)*

Wir betrachten die *Veronese-Abbildung*

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ & (t_0 : t_1) & \longmapsto & (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2). \end{array}$$

(a) Zeigen Sie: φ ist wohldefiniert und injektiv.

(b) Sei $C := \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2 \mid xz = y^2\}$. Zeigen Sie: $\varphi(\mathbb{P}^1) = C$.

Aufgabe 19: Einbettung des affinen Raums in den projektiven Raum *(2 Pkte.)*

Sei H eine Hyperebene in $\mathbb{P}^n$. Zeigen Sie: Es gibt eine Bijektion, so dass gilt $\mathbb{P}^n \setminus H \cong \mathbb{A}^n$.