PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG Wintersemester 2011/2012
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
D. Schmitz

Aufgaben zur Elementaren Algebraischen Geometrie

Blatt 6

Abgabe am Dienstag, 29.11.2011 vor der Vorlesung

Aufgabe 20: Fixpunkte projektiver Transformationen *(3 Punkte)*

Ein Punkt $x \in \mathbb{P}^n$ heißt *Fixpunkt* der projektiven Transformation $F : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$, falls $F(x) = x$ gilt. Zeigen Sie:

(a) Der Punkt $x = Kv \in \mathbb{P}^n$ ist genau dann ein Fixpunkt einer projektiven Transformation mit der $(n+1) \times (n+1)$-Matrix A, wenn v ein Eigenvektor von A ist.

(b) Eine projektive Transformation $F : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, F \neq \mathrm{id}$, hat entweder einen oder zwei Fixpunkte, eine projektive Transformation $F : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}, F \neq \mathrm{id}$, hat entweder einen oder zwei oder gar keinen Fixpunkt.

Aufgabe 21: Projektive Transformationen in der Ebene *(4 Punkte)*

Bestimmen Sie eine projektive Transformation auf $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, die das Viereck mit den Ecken $(1 : 0 : 2)$,$(1 : -1 : 1)$, $(4 : 2 : 0)$ und $(3 : 2 : 3)$ auf das „Koordinatenviereck“ mit den Ecken $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$,$(0 : 0 : 1)$ und $(1 : 1 : 1)$ abbildet. Besitzt diese Transformation Fixpunkte?

Aufgabe 22: Harmonische Punkte *(4 Punkte)*

Es seien $x, y, u, v \in \mathbb{P}^1$ vier verschiedene Punkte. Wir sagen, das Punktepaare x, y trennt das Paar u, v *harmonisch*, wenn es eine projektive Transformation $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ gibt, die u und v fest lässt und x und y vertauscht.

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
   (i) Das Paar x, y trennt das Paar u, v harmonisch.
   (ii) $DV(x, y, u, v) = DV(y, x, u, v)$.
   (iii) $DV(x, y, u, v) = -1$.

(b) Zeigen Sie, dass es zu je drei verschiedenen Punkten $x, y, u \in \mathbb{P}^1$ genau einen vierten harmonischen Punkt gibt, d. h. einen Punkt $v \in \mathbb{P}^1$, der zusammen mit u von dem Paar x, y harmonisch getrennt wird.

Aufgabe 23: Umkehrung des Satzes von Desargues *(3 Punkte)*

Der Satz von Desargues hat folgende Umkehrung:
Seien $Z_1, Z_2, Z_3, Z_1', Z_2', Z_3'$ paarweise verschiedene Geraden in $\mathbb{P}^2$. Angenommen die Schnittpunkte

$$Z_1 \cap Z_1', Z_2 \cap Z_2', Z_3 \cap Z_3'$$

liegen auf einer Geraden. Dann gehen die Geraden

$$(Z_1 \cap Z_2) \vee (Z_1' \cap Z_2')$$
$$(Z_2 \cap Z_3) \vee (Z_2' \cap Z_3')$$
$$(Z_3 \cap Z_1) \vee (Z_3' \cap Z_1')$$

durch einen Punkt. Der Beweis folgt noch in der Vorlesung.
Veranschaulichen Sie die Aussage mit Hilfe von GeoGebra (www.geogebra.org). Fügen Sie bei Zettelabgabe ein Bildschirmfoto mit Ihrer Lösung bei und senden Sie die entwickelte .ggb-Datei per Email an Ihren Tutor.