PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
D. Schmitz

Wintersemester 2011/2012

Aufgaben zur Elementaren Algebraischen Geometrie

Blatt 7

Abgabe am Dienstag, 6.12.2011 vor der Vorlesung

Aufgabe 24: Desargues-Geraden *(4 Punkte)*

(a) Dualisieren Sie den Satz von Desargues. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Aufgabe 23. Fällt Ihnen etwas auf?

(b) Drei Dreiecke $a_1a_2a_3$, $b_1b_2b_3$ und $c_1c_2c_3$ seien zueinander paarweise perspektiv mit demselben Pespektivitätszentrum. (Das *Perspektivitätszentrum* zweier perspektiver Dreiecke ist der (gemeinsame) Schnittpunkt der Verbindungegeraden einander entsprechender Eckpunkte.) Zeigen Sie, dass sich die drei Desargues-Geraden (d.h. die Geraden, deren Existenz im Satz von Desargues behauptet wird) in einem Punkt schneiden.

Hinweis: Seien $t_3 := b_1b_2 \cap c_1c_2$, $t_2 := b_1b_3 \cap c_1c_3$, $r_3 := a_1a_2 \cap c_1c_2$, $r_2 := a_1a_3 \cap c_1c_3$, $s_3 := a_1a_2 \cap b_1b_2$, $s_2 := a_1a_3 \cap b_1b_3$. Zeigen Sie mit Hilfe des dualen Satzes von Desargues, dass die Dreiecke $t_3r_3s_3$ und $t_2r_2s_2$ perspektiv sind und folgern Sie die Behauptung.

Aufgabe 25: Dualitätsprinzip *(4 Punkte)*

(a) Formulieren und beweisen Sie ein Dualitätsprinzip zwischen Punkten und Hyperebenen in $\mathbb{P}^n$.

(b) Sei H_p die zu $p \in \mathbb{P}^n$ duale Hyperebene. Zeigen Sie:

$$p \in H_q \cap H_{q'} \iff (q \vee q') \subset H_p.$$

(c) Dualisieren Sie folgende Aussagen in $\mathbb{P}^3$:
   (i) Seien ein Punkt und eine Gerade, die den Punkt nicht enthält, gegeben. Dann gibt es genau eine Ebene, die den Punkt und die Gerade enthält.
   (ii) Zwei sich schneidende Geraden sind in einer Ebene enthalten.

Aufgabe 26: Gemeinsame Faktoren *(4 Punkte)*

Es sei R ein faktorieller Ring. Finden Sie ein Determinantenkriterium dafür, dass die Polynome $f, g \in R[X]$ einen gemeinsamen Faktor von mindestens dem Grad k haben und beweisen Sie dieses.

Hinweis: Beweisen Sie eine angepasste Version des „φ-ψ-Satzes“ der Vorlesung.

Aufgabe 27: Rechenregeln für Resultanten *(2 Punkte)*

Es sei R ein faktorieller Ring und es seien Polynome $f, g \in R[X]$ mit $\deg f = m$ und $\deg g = n$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Res}(f, g) = (-1)^{m \cdot n}\mathrm{Res}(g, f)$.

(b) $\mathrm{Res}(af, bg) = a^n b^m \mathrm{Res}(f, g)$ für Konstanten $a, b \in R$.