

## Aufgaben zur Elementaren Algebraischen Geometrie

Blatt 8

Abgabe am Dienstag, 13.12.2011 vor der Vorlesung

### Aufgabe 28: Ebene Kurven

(2 Punkte)

Wir betrachten die Polynomabbildung

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ t &\longmapsto (t^2, t^3 - t).\end{aligned}$$

Geben Sie eine Gleichung für  $\varphi(\mathbb{C})$  an.

### Aufgabe 29: Homogene Polynome und Euler-Formel

(4 Punkte)

Zeigen Sie:

- Ein Polynom  $f \in K[X_0, \dots, X_n]$  ist genau dann homogen vom Grad  $d$ , wenn jedes Monom von  $f$  den Grad  $d$  hat.
- Für homogene Polynome  $f \in K[X_0, \dots, X_n]$  vom Grad  $d$  gilt die *Euler-Formel*:

$$\sum_{j=0}^n \frac{\partial f}{\partial X_j} \cdot X_j = d \cdot f.$$

Hier bezeichnet  $\frac{\partial}{\partial X_i}$  die *formale Ableitung* nach der Unbestimmten  $X_i$ .

### Aufgabe 30: Affine Bilder ebener algebraischer Kurven

(2 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Urbild einer algebraischen Kurve in  $\mathbb{A}^2$  unter einer affinen Transformation wieder eine algebraische Kurve (vom selben Grad) ist. Warum folgt daraus, dass auch das *Bild* einer algebraischen Kurve unter einer affinen Transformation wieder eine algebraische Kurve ist?

### Aufgabe 31: Schnittpunkte ebener algebraischer Kurven

(4 Punkte)

- Finden Sie Geraden, die die Kurve

$$\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x^3 \}$$

in 1 bzw. 2 bzw. 3 Punkten schneiden. (Eine Skizze kann helfen.)

- Warum können nicht mehr als drei Schnittpunkte vorkommen?
- Wenn eine Kurve in  $\mathbb{C}^2$  durch ein Polynom von Grad  $d$  definiert wird, welche Möglichkeiten erwarten Sie für die Anzahl von Schnittpunkten mit Geraden? Können Sie einen Satz dazu formulieren und beweisen?

### Aufgabe 32: Desargues-Geraden

(2 Punkte)

Veranschaulichen Sie die Aussage über das Schnittverhalten der Desargue-Geraden dreier perspektiver Dreiecke mit gleichem Perspektivitätszentrum aus Aufgabe 24b) mit Hilfe von Geogebra. Die Abgabe erfolgt wieder durch Ausdruck und Email an den Tutor.