PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
D. Schmitz

Wintersemester 2011/2012

Aufgaben zur Elementaren Algebraischen Geometrie

Blatt 9

Abgabe am Dienstag, 20.12.2011 vor der Vorlesung

Aufgabe 33: Grad einer ebenen algebraischen Kurve *(3 Punkte)*

Gegeben sei eine Polynomabbildung

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ t &\longmapsto (f(t), g(t)) \end{aligned}$$

mit Polynomen $f, g \in \mathbb{C}[T]$ vom Grad d bzw. e. Finden Sie eine Abschätzung (nach oben) für den Grad der Kurve $\varphi(\mathbb{C})$.

Aufgabe 34: Kegelschnitte *(3 Punkte)*

Bestimmen Sie eine affine Transformation, die den Kegelschnitt

$$V\left(2X_1^2 - \frac{15}{2}X_2^2 - 2X_1X_2 - 10X_1 - 19X_2 - 6\right)$$

über $\mathbb{R}$ in Normalform überführt. Geben Sie den affinen Typ des Kegelschnitts an.

Aufgabe 35: Multiplizitäten und Tangenten *(3 Punkte)*

Wir betrachten die *Herzkurve (Kardioide)* in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, die das Minimalpolynom

$$((X^2 + Y^2 - X)^2 - X^2 - Y^2$$

hat. Bestimmen Sie die Multiplizität von C in den Punkten $(0, 0)$ sowie $(0, 1)$. Sind die Punkte glatte oder singuläre Punkte der Kurve? Geben Sie die Gleichung der Tangente bzw. der Geraden an, aus denen der Tangentialkegel besteht.

Aufgabe 36: Gruppenstruktur auf ebenen Kubiken *(4 Punkte)*

Wir betrachten die Kurve $C = V(Y - X^3)$ in $\mathbb{C}^2$. Sie ist das Bild von $\mathbb{C}$ unter der bijektiven Abbildung $\mathbb{C} \longrightarrow C$, $t \longmapsto (t, t^3)$ und erbt daher von der additiven Gruppe $(\mathbb{C}, +)$ eine Gruppenverknüpfung. Wir schreiben diese als $\oplus$. (Achtung: Sie ist verschieden von der koordinatenweisen Addition, die von $\mathbb{C}^2$ induziert wird.)

(a) Welcher Punkt auf C ist das neutrale Element von $\oplus$? Wo liegt (in geometrischer Beschreibung) der zu $p = (x, y) \in C$ bezüglich $\oplus$ inverse Punkt?

bitte wenden

(b) Zeigen Sie, dass drei (paarweise verschiedene) Punkte $p, q, r \in C$ die Gleichung

$$p \oplus q \oplus r = 0$$

genau dann erfüllen, wenn Sie auf einer Geraden liegen. *Tipp:* Hierfür könnte die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

und Aufgabe 2 (vom ersten Übungsblatt) nützlich sein.

(c) Finden Sie, analog zu (b), eine geometrische Charaktierisierung der Gleichung

$$p \oplus p \oplus r = 0\,.$$

für Punkte $p \neq r$ aus C. *Tipp:* Schreiben Sie $p = (a, a^3)$ und betrachten Sie die Tangente an C in p.