PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
D. Schmitz

Wintersemester 2011/2012

Aufgaben zur Elementaren Algebraischen Geometrie

Blatt 10

Abgabe am Dienstag, 10.01.2012 vor der Vorlesung

Aufgabe 37: Singularitäten und Tangentialkegel *(4 Punkte)*

Recherchieren Sie die Gleichung der *Bicorne-Kurve* (auch *cocked hat* genannt) von Sylvester und Cayley, und bestimmen Sie deren Singularitäten. Geben Sie zu jeder Singularität die Geraden an, aus denen der Tangentialkegel besteht.

Aufgabe 38: Tangenten *(4 Punkte)*

Für eine Kurve $C = V(f) \subset K^2$ haben Sie den algebraischen Begriff der *Tangente* in einem glatten Kurvenpunkt $p \in C$ kennengelernt.

(a) Nehmen Sie an, das Polynom $f(X, Y) \in K[X, Y]$ lässt sich als $Y - g(X)$ schreiben mit einem Polynom $g \in K[X]$, d.h. die Gleichung der Kurve lässt sich nach nach einer Unbestimmten auflösen,

$$f(x, y) = 0 \iff y = g(x) \qquad \text{für } (x, y) \in K^2$$

(Die Kurve C ist dann der Funktionsgraph einer Polynomfunktion.) Überprüfen Sie, dass für $K = \mathbb{R}$ der algebraische Tangentenbegriff mit dem Begriff der „Tangente an einem Funktionsgraph" übereinstimmt, den Sie aus der Analysis kennen.

(b) Nehmen wir nun an (wieder für $K = \mathbb{R}$), dass sich die Kurvengleichung zwar nicht *global* nach einer Umbestimmten auflösen lässt, dass dies aber immerhin *lokal* in einer Umgebung eines gegebenen Punkts mit einer *differenzierbaren* Funktion möglich ist: $y = g(x)$ mit einer differenzierbaren Funktion g in einer Umgebung eines gegebenen Punkts. Überprüfen Sie im Beispiel $x^2 + y^2 = 1$, ob der Tangentenbegriff aus der Analysis immer noch mit dem algebraischen übereinstimmt, obwohl nun die zur Auflösung benutzte Funktion g keine Polynomfunktion ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Aussage in b) nicht nur im Beispiel zutrifft, sondern für beliebige Kurven in $\mathbb{R}^2$ richtig ist.

Aufgabe 39: Projektive Kurven *(3 Punkte)*

(a) Wir betrachten in der affinen Ebene $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ den „Kreis"

$$C = V\left((X_0 - a)^2 + (X_1 - b)^2 - r^2\right) \quad \text{mit } a, b, r \in \mathbb{C}.$$

Bestimmen Sie den projektiven Abschluss $\overline{C} \subset \mathbb{P}^2$ unter der Einbettung

$$\begin{array}{rccc} \iota : & \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} & \hookrightarrow & \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \\ & (x_0, x_1) & \longmapsto & (x_0 : x_1 : 1) \end{array}$$

und geben Sie die unendlich fernen Punkte von $\overline{C}$ an.

bitte wenden

(b) Bestimmen Sie alle Kurven $C = V(F) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ mit $\deg F = 2$, die durch die Punkte $(1 : i : 0)$ und $(1 : -i : 0)$ gehen.

Aufgabe 40: Singularitäten projektiver Kurven *(2 Punkte)*

Sei $C = V(F)$ eine Kurve im $\mathbb{P}^2$ und $p \in \mathbb{P}^2$. Zeigen Sie, dass die Kurve C in p genau dann singulär ist, wenn alle partiellen Ableitungen von F in p verschwinden, d.h. wenn gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial X_i}(p) = 0 \quad \text{für } i = 0, 1, 2.$$

Hinweis: Euler-Formel