PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
D. Schmitz

Wintersemester 2011/2012

# Aufgaben zur Elementaren Algebraischen Geometrie

Blatt 11

Abgabe am Dienstag, 17.01.2012 vor der Vorlesung

**Aufgabe 41: Projektive Tangenten** *(2 Punkte)*

Sei $C = V(F)$ eine Kurve in $\mathbb{P}^2$ und $p \in C$ ein glatter Punkt. Zeigen Sie, dass für die projektive Tangente gilt:

$$\mathbb{T}_p C = V\left(\sum_{i=0}^{2} \frac{\partial F}{\partial X_i}(p) \cdot X_i\right).$$

*Hinweis:* Euler-Formel

**Aufgabe 42: Kegelschnitte** *(4 Punkte)*

Sei $K$ ein Körper. Wir betrachten folgende Kegelschnitte $Q_i \subset \mathbb{A}^2_K$:

$$\begin{aligned} Q_1 &= V\left(X_0^2 + X_1^2 - 1\right) \\ Q_2 &= V\left(X_0^2 - X_1^2 - 1\right) \\ Q_3 &= V\left(X_0^2 - X_1\right). \end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie die $Q_i$ für den Fall $K = \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie jeweils den projektiven Abschluss $\overline{Q_i} \subset \mathbb{P}^2_K$ sowie die unendlich fernen Punkte der $\overline{Q_i}$ für den Fall $K = \mathbb{C}$.

(c) Geben Sie für den Fall $K = \mathbb{C}$ projektive Transformationen an, die die $\overline{Q_i}$ ineinander überführen.

**Aufgabe 43: Projektive Klassifikation der Kegelschnitte über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$** *(2 P.)*

Bestimmen Sie zu folgendem Kegelschnitt in $\mathbb{P}^2$ die Normalform über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

$$V\left(4X_0^2 + 6X_1^2 - 2X_2^2 - X_1X_2 - 7X_0X_2 + 14X_0X_1\right).$$

**Aufgabe 44: Tangentialkegel und Schnittmultiplizitäten** *(4 Punkte)*

Wir betrachten das dreiblättrige Kleeblatt

$$C = V\left((X_1^2 + X_2^2)^2 + 3X_0X_1^2X_2 - X_0X_2^3\right) \subset \mathbb{P}^2$$

und das vierblättrige Kleeblatt

$$D = V\left((X_1^2 + X_2^2)^3 - 4X_0^2X_1^2X_2^2\right) \subset \mathbb{P}^2.$$

(a) Bestimmen Sie die Singularitäten von $D$.

(b) Geben Sie die Tangentialkegel von $C$ und $D$ im Punkt $q = (1:0:0)$ an.

(c) Bestimmen Sie die Schnittmultiplizitäten

$$I(C, V(X_2), q)\ , \quad I(D, V(X_2), q)\ , \quad I(C, D, q).$$

(d) Wieviele weitere (mit Multiplizität gezählte) Schnittpunkte von $C$ und $D$ erwarten Sie?