PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
D. Schmitz

Wintersemester 2011/2012

# Aufgaben zur Elementaren Algebraischen Geometrie

Blatt 12

Abgabe am Dienstag, 24.01.2012 vor der Vorlesung

**Aufgabe 45: Schnittmultiplizität beim Schnitt mit Geraden** *(3 Punkte)*

(a) Es sei $C = V(F)$ eine Kurve in $\mathbb{P}^2$, so dass der Punkt $(0 : 0 : 1)$ nicht auf $C$ liegt. (Diese Bedingung verlangt unsere Definition der Schnittmultiplizität; eigentlich ist sie überflüssig.) Weiter sei $L$ die Gerade $V(X_2)$. Zeigen Sie: Die Schnittmultiplizität $I(C, L, p)$ in einem beliebigen Schnittpunkt $p = (p_0 : p_1 : p_2)$ stimmt mit der Nullstellenordnung des Polynoms $F(X_0, X_1, 0)$ im Punkt $(p_0 : p_1)$ überein.

(b) Formulieren und beweisen Sie eine analoge Aussage für beliebige Geraden $V(a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2)$.
*Hinweis:* Nutzen Sie für den Beweis, dass die Schnittmultiplizität eine projektive Invariante ist.

**Aufgabe 46: Schnitt ebener Kurven** *(3 Punkte)*

Diese Aufgabe zeigt an einem – willkürlichen, aber typischen – Beispiel, wie man mit dem Satz von Bézout und der Schnittungleichung aus Informationen über das Schnittverhalten Aussagen über die Komponentenzerlegung von Kurven gewinnen kann.

Von einem Kegelschnitt $C \subset \mathbb{P}^2$ und einer Kubik (Kurve vom Grad 3) $D \subset \mathbb{P}^2$ sei bekannt, dass $C$ glatt ist und $D$ genau eine Singularität $p$ hat. Weiter sei bekannt, dass sich $C$ und $D$ in $p$ und in mindestens fünf weiteren Punkten schneiden. Zeigen Sie, dass $D$ reduzibel ist mit zwei irreduziblen Komponenten: $C$ und eine Gerade, die Tangente an $C$ ist.

**Aufgabe 47: Polaren** *(3 Punkte)*

Wir betrachten die Neilsche Parabel $C = V(X_0X_2^2 - X_1^3) \subset \mathbb{P}^2$. Bestimmen Sie alle Tangenten an $C$, die durch den Punkt $p = (1 : 1 : 0)$ gehen.

**Aufgabe 48: Büschel** *(3 Punkte)*

Sei $K$ ein Körper mit $\mathrm{char} K \neq 2$ und sei $C = V(F)$ ein Kegelschnitt in $\mathbb{P}^2_K$. Dann können wir das Polynom $F$ in der Form

$$F(X_0, X_1, X_2) = \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

mit einer symmetrischen Matrix $A \in M_3(K)$ schreiben.

(a) Zeigen Sie, dass $C$ genau dann glatt ist, wenn $A$ invertierbar ist.

(b) Seien $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^2_K$ zwei verschiedene Kegelschnitte, wobei $C_1$ glatt ist. Wieviele singuläre Elemente kann das von $C_1$ und $C_2$ erzeugte Büschel haben?