PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer

Wintersemester 2009/2010

Aufgaben zum Modul Holomorphe Funktionen und abelsche Varietäten (Funktionentheorie II) – Blatt 1

Besprechung im ersten Tutorium

Wir beginnen mit einer Wiederholung und Kontrolle des Basiswissens aus der Funktionentheorie I. Die folgenden Aufgaben eignen sich dazu sehr gut: Sie bildeten den Funktionentheorie-Block einer vergangenen Staatsexamensprüfung. Ich empfehle Ihnen folgende Vorgehensweise:

(1) Bearbeiten Sie die Aufgaben innerhalb von 60 Minuten, ohne Hilfsmittel zu benutzen. (Dies entspricht der Situation im Staatsexamen.)
(2) Analysieren (und ergänzen) Sie dann in einem zweiten Arbeitsschritt Ihre Lösungen unter Verwendung Ihrer Unterlagen (Vorlesungsmitschrift, Bücher).

Aufgabe 1
Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit der Eigenschaft

$$f^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

(Hier bezeichnet $f^{(n)}$ wie üblich die n-te Ableitung von f.) Bestimmen Sie den Funktionswert $f(1)$.

Aufgabe 2
Wir betrachten die auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ durch

$$f_1(z) = \frac{\sin z}{z^2} \qquad f_2(z) = e^{\frac{1}{z}} \qquad f_3(z) = \frac{1}{ze^z} \qquad f_4(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

definierten Funktionen.

Geben Sie bei jeder der vier Funktionen f_i an, welche Art Singularität diese im Nullpunkt haben, und entscheiden Sie für jede der Funktionen f_i, ob es eine Folge (a_n) in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt mit

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f_i(a_n) = \infty$

und ob es eine Folge (a_n) in $\mathbb{C}$ gibt mit

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f_i(a_n) \in \mathbb{R}$

Aufgabe 3
Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nichtkonstante holomorphe Funktion. Wir betrachten die Menge

$$U := f^{-1}(\{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \,\})$$

Zeigen Sie:
(a) U ist nicht leer.
(*Hinweis:* Betrachten Sie die Funktion $1/f$.)
(b) Falls U beschränkt ist, dann hat f eine Nullstelle.

Aufgabe 4
Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z-1)(z-2)}\, dz\ ,$$

wobei γ die (positiv orientierte) Randkurve desjenigen Quadrats ist, das die Punkte

$$\left(-\frac{1}{2}\,, -\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{3}{2}\,, -\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{3}{2}\,, \frac{3}{2}\right) \text{ und } \left(-\frac{1}{2}\,, \frac{3}{2}\right)$$

als Eckpunkte hat.