PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer

Wintersemester 2009/2010

Aufgaben zur Funktionentheorie II
Abgabe am 22.10.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 5: Nullstellenverteilungen
Es sei f eine ganze Funktion, die in den ganzen Zahlen einfache Nullstellen hat und sonst keine weiteren Nullstellen besitzt. Zeigen Sie, dass man eine Darstellung

$$f(z) = e^{g(z)} \cdot z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

hat, wobei g eine ganze Funktion ist.

Aufgabe 6: Periodische meromorphe Funktionen

(a) Zeigen Sie (unabhängig vom Ergebnis der nachfolgenden Aufgabe), dass durch

$$\frac{1}{z} + \sum_{k \neq 0} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} \right)$$

eine meromorphe Funktion f mit Polen erster Ordnung in den ganzen Zahlen dargestellt wird.

(b) Zeigen Sie, dass f die Periode 1 hat, d.h. dass gilt

$$f(z+1) = f(z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 7: Partialbruchentwicklung des Cotangens
Zeigen Sie (unabhängig vom Ergebnis der vorigen Aufgabe), dass für die durch

$$\cot z =_{\text{def}} \frac{\cos z}{\sin z} \tag{$*$}$$

definierte *Cotangens*-Funktion die folgende Partialbruchentwicklung gilt:

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{k \neq 0} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} \right) .$$

Anleitung:

(a) Überlegen Sie zunächst, dass die angegebene Reihe lokal gleichmäßig konvergiert.

(b) Folgern Sie nun $(*)$ durch gliedweise Differentiation.

Aufgabe 8: Eine Formel für Residuen
Zeigen Sie: Sind g und h holomorphe Funktionen in einer Umgebung von $p \in \mathbb{C}$, und ist $ord_p(h) < \infty$, so gilt

$$Res\left(g \cdot \frac{h'}{h}, p\right) = ord_p(h) \cdot g(p) .$$