PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer

Wintersemester 2009/2010

Aufgaben zum Modul „Holomorphe Funktionen und abelsche Varietäten"
(Funktionentheorie II) – Blatt 3
Abgabe am 29.10.2009 vor der Vorlesung

Die folgenden Aufgaben sind nicht nur wegen des Übungseffekts von Bedeutung, sondern auch, weil die darin formulierten Aussagen an und für sich interessant und wichtig sind; es ist gut, sich die Aussagen zu merken – zum Beispiel, da wir sie eventuell an späterer Stelle benutzen werden. Solche Aufgaben von „unabhängigem Interesse" werden wir künftig am Rand mit der Markierung ‚▸' kennzeichnen.

▸ Aufgabe 9: Gitterbasen
Ist $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ein Gitter in $\mathbb{C}$, so nennt man $\{\omega_1, \omega_2\}$ eine *Basis* von Λ. Zeigen Sie: Je zwei Basen eines Gitters gehen durch Transformation mit einer Matrix $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ mit $\det(A) \in \{\pm 1\}$ auseinander hervor.

▸ Aufgabe 10: Äquivalente Gitter
Wir nennen zwei Gitter $\Lambda, \Lambda' \subset \mathbb{C}$ *äquivalent*, falls ein $\mu \in \mathbb{C}^*$ existiert mit

$$\Lambda' = \mu \cdot \Lambda \ .$$

(Dies bedeutet, dass die Gitter durch eine $\mathbb{C}$-lineare Transformation auseinander hervorgehen.)

(a) Zeigen Sie, dass jedes Gitter äquivalent ist zu einem Gitter der Form

$$\Lambda_\tau =_{\text{def}} \mathbb{Z} \cdot \tau + \mathbb{Z} \cdot 1$$

mit einem $\tau \in \mathbb{H}$. (Dabei bezeichnet $\mathbb{H}$ die obere Halbebene in $\mathbb{C}$.)

(b) Zwei Gitter Λ_σ und Λ_τ mit $\sigma, \tau \in \mathbb{H}$ sind genau dann äquivalent, wenn es eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gibt mit

$$\sigma = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \ .$$

(Mit $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist wie üblich die Menge aller ganzzahligen 2×2-Matrizen mit Determinante 1 bezeichnet.)

▸ Aufgabe 11: Weierstraßsche $\wp$-Funktion
Zeigen Sie, dass sich jede *gerade* elliptische Funktion f, die den Punkt 0 nicht als Nullstelle oder Pol hat, schreiben lässt als

$$f(z) = \text{const} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{\wp(z) - \wp(a_i)}{\wp(z) - \wp(b_i)} \ ,$$

wobei $\pm a_1, \ldots, \pm a_n$ die Nullstellen und $\pm b_1, \ldots, \pm b_n$ die Polstellen von f sind (jeweils mit ihrer Vielfachheit aufgelistet).
Tipp: Zeigen Sie, dass die Funktion auf der rechten Seite genau dieselben Nullstellen und Polstellen wie f hat (mit denselben Vielfachheiten).

▸* Aufgabe 12: Diskrete Untergruppen des $\mathbb{R}^n$
Zeigen Sie, dass jede diskrete Untergruppe $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ von der Form

$$\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \ldots + \mathbb{Z}\omega_k$$

ist mit linear unabhängigen Vektoren $\omega_1, \ldots, \omega_k$.
Bemerkung: Diese Aufgabe ist (zusätzlich zur oben erklärten Pfeil-Markierung) mit einem Stern gekennzeichnet, weil sie (vielleicht) etwas kniffliger ist als die anderen Aufgaben auf diesem Blatt. Versuchen Sie trotzdem (oder erst recht), sie zu lösen.