PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG Wintersemester 2009/2010
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
Davd Schmitz

Aufgaben zum Modul „Holomorphe Funktionen und abelsche Varietäten“ (Funktionentheorie II) – Blatt 4

Abgabe am 05.11.2009 vor der Vorlesung

Wir bezeichnen mit $\mathbb{H}$ die obere Halbebene in $\mathbb{C}$. Die Menge

$$F =_{\text{def}} \left\{ \tau \in \mathbb{H} \,\middle|\, -\tfrac{1}{2} \le \operatorname{Re}\tau \le 0, |\tau| \ge 1 \text{ oder } 0 < \operatorname{Re}\tau < \tfrac{1}{2}, |\tau| > 1 \right\}$$

wird *Fundamentalbereich* für $\mathbb{H}$ genannt. Die Bedeutung von F wird aus den folgenden beiden Aufgaben ersichtlich: *Jeder Äquivalenzklasse von Gittern entspricht genau ein Element von F.*

Aufgabe 13: Fundamentalbereich für $\mathbb{H}$, Teil 1
Zeigen Sie, dass jedes Gitter in $\mathbb{C}$ zu einem Gitter Λ_τ äquivalent ist, wobei τ in F liegt. (Dabei ist Λ_τ ist das in Aufgabe 9 betrachtete Gitter.)
Tipp: Starten Sie mit einer Gitterbasis $\{\omega_1, \omega_2\}$, wie sie in der Vorlesung konstruiert wurde.

Aufgabe 14: Fundamentalbereich für $\mathbb{H}$, Teil 2
Seien $\sigma, \tau \in F$. Zeigen Sie, dass die Gitter Λ_σ und Λ_τ nur dann zueinander äquivalent sind, wenn $\sigma = \tau$ gilt.
Anleitung: Überlegen Sie sich:

(a) Es ist zu zeigen, dass aus

$$\sigma = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \qquad \text{mit } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \tag{1}$$

folgt $\sigma = \tau$.

(b) Für σ und τ aus F, die (1) erfüllen, gilt

$$\operatorname{Im}\sigma = \frac{\operatorname{Im}\tau}{|c\tau + d|^2} \; . \tag{2}$$

(c) Wir dürfen $\operatorname{Im}\sigma \ge \operatorname{Im}\tau$ annehmen, also $|c\tau + d| \le 1$ wegen Gleichung (2). Wegen der Voraussetzung an die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ gibt es dafür nur wenige Möglichkeiten: Sie können drei Fälle unterscheiden, je nachdem ob $c = 0$, $d \ne 0$ oder $d = 0$, $c \ne 0$ oder $c \ne 0$ und $d \ne 0$ gilt.

Aufgabe 15: Äquivalenz von Gittern
Entscheiden Sie jeweils, ob die beiden Gitter äquivalent sind.

(a) $\mathbb{Z} \cdot e^{\frac{1}{3}\pi i} + \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} \cdot e^{\frac{2}{3}\pi i} + \mathbb{Z}$

(b) $\mathbb{Z} \cdot (1 + i) + \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} \cdot (-1 + i) + \mathbb{Z} \cdot i$

(c) $\mathbb{Z} \cdot (1 + i) + \mathbb{Z} \cdot i$ und $\mathbb{Z} \cdot (1 + i) + \mathbb{Z} \cdot 2i$

(d) $\mathbb{Z} \cdot (1 + i) + \mathbb{Z} \cdot i$ und $\mathbb{Z} \cdot (1 + i) + \mathbb{Z} \cdot 3i$