PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
David Schmitz

Wintersemester 2009/2010

Aufgaben zum Modul „Holomorphe Funktionen und abelsche Varietäten“ (Funktionentheorie II)

Abgabe am 12.11.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 16: Einbettung elliptischer Kurven

Zu einem Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}$ betrachten wir die aus der Vorlesung bekannte Einbettung der elliptischen Kurve $\mathbb{C}/\Lambda$

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C}/\Lambda - \{ 0 \} &\to \mathbb{C}^2 \\ z + \Lambda &\mapsto (\wp(z), \wp'(z)). \end{aligned}$$

Zur Erinnerung: Das Bild $\mathrm{im}(\phi)$ ist die affine Kurve $C_\Lambda = \{ y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 \}$.
Zeigen Sie, dass für äquivalente Gitter Λ und Λ' eine invertierbare lineare Abbildung $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ existiert, so dass

$$f(C_\Lambda) = C_{\Lambda'}.$$

Aufgabe 17: Polyzylinder und Polytori

Ein *Extremalpunkt* einer kompakten konvexen Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Punkt $x \in K$, so dass $K - \{ x \}$ konvex ist. Es bezeichne nun K den Abschluss des Polyzylinders $\Delta_r(p)$ mit $p \in \mathbb{C}^n$ und $r \in \mathbb{R}^n_+$. Zeigen Sie, dass die Menge der Extremalpunkte von K gerade der Polytorus

$$T_r(p) = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid | z_k - p_k | = r_k, 1 \le k \le n \}$$

ist.

Aufgabe 18

Eine Abbildung $f : X \to Y$ topologischer Räume heißt *offen* (bzw. *abgeschlossen*), falls f offene (abgeschlossene) Mengen in offene (abgeschlossene) Mengen abbildet. Zeigen Sie unter Rückgriff auf die Definition der komplexen Differenzierbarkeit, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C}^2 \\ (z, w) &\mapsto (z, zw) \end{aligned}$$

holomorph ist. Zeigen Sie weiterhin, dass f weder offen noch abgeschlossen ist.
Hinweis: Wählen Sie zum Beispiel Mengen der Form $B_r(0) \times B_s(0)$ bzw. $\{ (z, w) \mid zw = 1 \}$.

▸ **Aufgabe 19: Weierstraß-Kriterium**

Formulieren und beweisen Sie ein Majorantenkriterium für mehrdimensionale Funktionenreihen.