PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
David Schmitz

Wintersemester 2009/2010

Aufgaben zum Modul „Holomorphe Funktionen und abelsche Varietäten"
(Funktionentheorie II) – Blatt 6
Abgabe am 19.11.2009

▸ Aufgabe 20: Konvergenzbereiche ohne innere Punkte

Zeigen Sie, dass es Potenzreihen gibt, deren Konvergenzbereich von $\{0\}$ verschieden ist, aber keine inneren Punkte hat.
Tipp: Sie können zum Beispiel die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} k! z_1^k z_2^k$$

betrachten und nachweisen, dass der Konvergenzbereich gerade $(\mathbb{C} \times \{ 0 \}) \cup (\{ 0 \} \times \mathbb{C})$ ist.
Übrigens: Potenzreihen mit dieser Eigenschaft sind nicht Element des Rings $\mathbb{C}\{ z_1, \ldots, z_n \}$. Warum nicht?

▸ Aufgabe 21: Cauchy-Ungleichungen

Es sei $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{C}^n$ und $\Delta_r(p)$ ein Polyzylinder um $p \in D$, dessen Abschluss in D enthalten ist. Wir bezeichnen mit $T_r(p)$ den Torus $\{ z \in \mathbb{C}^n \mid |z_i - p_i| = r_i \}$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $i \in \mathbb{N}_0^n$ die Ungleichung

$$\left|D^i f(p)\right| \leq \frac{i!}{r^i} \cdot \|f\|_{T_r(p)}$$

erfüllt ist.

(b) Folgern sie für alle $i \in \mathbb{N}_0^n$ und alle $z \in \Delta_{r/2}(p)$ die Ungleichung

$$\left|D^i f(z)\right| \leq \frac{2^{|i|} i!}{r^i} \cdot \|f\|_{\Delta_r(p)} .$$

(Hier wurden die üblichen Abkürzungen für Multiindizes verwendet: $i! = i_1! \cdots i_n!$, $r^i = r_1^{i_1} \cdots r_n^{i_n}$, und $|i| = i_1 + \ldots + i_n$.)
Tipp: Gehen Sie bei (a) wie im eindimensionalen Fall vor.

▸ Aufgabe 22: Satz von Liouville

Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so ist f konstant.
Tipp: Folgern Sie dies wie im eindimensionalen Fall aus den Cauchy-Ungleichungen.

▸ Aufgabe 23: Gebietstreue und Maximumprinzip

(a) Es sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet (d.h. eine nicht-leere offene zusammenhängende Menge). Zeigen Sie: Ist $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, so ist auch $f(G)$ ein Gebiet.
Anleitung: Wählen Sie zu gegebenem Punkt $p \in G$ eine konvexe Umgebung B (z.B. eine Kugel), einen Punkt $q \in B$ mit $f(q) \neq f(p)$, und betrachten Sie die durch $g(z) = f(p + z(q - p))$ auf der Menge $\{ z \in \mathbb{C} \mid p + z(q - p) \in B \}$ definierte Funktion.

(b) Folgern Sie aus der eben gezeigten Gebietstreue das folgende Maximumprinzip: Es sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Falls $|f|$ auf G ein Maximum annimmt, dann ist f konstant.