PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
David Schmitz

Wintersemester 2009/2010

Aufgaben zum Modul „Holomorphe Funktionen und abelsche Varietäten"
(Funktionentheorie II) – Blatt 7
Abgabe am 26.11.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 24: Scherungen
Gegeben sei die holomorphe Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (z,w) & \mapsto & z^2 \cdot w \cdot \cos(z+w). \end{array}$$

Finden Sie eine Scherung $\sigma : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$, so dass $f \circ \sigma$ w-allgemein der Ordnung 3 ist.

▸ **Aufgabe 25: Satz über implizite Funktionen**
Sei $f \in \mathcal{O}_{n+1}$ mit $f(0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial z_{n+1}}(0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass ein $g \in \mathcal{O}_n$ existiert, so dass für alle z in einer Umgebung von 0 gilt:

$$f(z_1, \dots, z_{n+1}) = 0 \iff z_{n+1} = g(z_1, \dots, z_n) \ .$$

Tipp: Überlegen Sie sich, dass f unter den gemachten Annahmen z_{n+1}-allgemein der Ordnung 1 ist.

▸ **Aufgabe 26: Zerlegung in irreduzible Faktoren**

(a) Definieren Sie eine nicht-triviale Ordnungsfunktion auf $\mathcal{O}_n$, das heißt eine Abbildung $\mathrm{ord}_0 : \mathcal{O}_n \longrightarrow \mathbb{N}_0$ mit der Eigenschaft $\mathrm{ord}_0(f \cdot g) = \mathrm{ord}_0(f) + \mathrm{ord}_0(g)$ und $\mathrm{ord}_0(f) > 0$ für $f \notin \mathcal{O}_n^*$.

(b) Zeigen Sie, dass sich jedes Element in $\mathcal{O}_n$ als Produkt endlich vieler irreduzibler Elemente schreiben lässt. (Natürlich sollen Sie dazu nicht benutzen, dass $\mathcal{O}_n$ faktoriell ist.)

(c) Zerlegen Sie $f(z,w) = z^2 - w^2(w+1)$ in $\mathcal{O}_2$ in irreduzible Faktoren.
Tipp: Denken Sie an die Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

▸ **Aufgabe 27: Analytische Mengen**

(a) Es sei $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Menge und $T \subset \mathcal{O}(U)$ eine (eventuell unendliche) Menge von holomorphen Funktionen auf U. Wir bezeichnen mit $N(T)$ die *Nullstellenmenge* von T,

$$N(T) =_{\mathrm{def}} \{\, z \in U \mid f(z) = 0 \text{ für alle } f \in T \,\} \ .$$

Zeigen Sie, dass zu jedem Punkt $p \in U$ eine Umgebung $V \subset U$ sowie *endlich viele* Funktionen $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}(V)$ existieren, so dass gilt

$$N(T) \cap V = N(\{\, f_1, \dots, f_r \,\}) \ .$$

(„$N(T)$ wird lokal durch endlich viele Gleichungen beschrieben.")
Tipp: Überlegen Sie sich zuerst, dass das von T erzeugte Ideal

$$I = \left\{ \sum_{i=1}^{m} g_i h_i \;\middle|\; m \geq 0,\ g_i \in \mathcal{O}(U),\ h_i \in T \right\}$$

dieselbe Nullstellenmenge wie T hat und nutzen Sie dann, dass $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,p}$ für jeden Punkt p noethersch ist.

(b) Zeigen Sie im Kontrast zur lokalen Situation, dass der Ring $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ nicht noethersch ist.
Hinweis: Sie dürfen folgende Aussage aus der Algebra verwenden: Ein Ring R ist genau dann noethersch, wenn für jede aufsteigende Kette von Idealen in R

$$\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \dots$$

ein k_0 existiert, so dass $\mathfrak{a}_m = \mathfrak{a}_n$ falls $m, n \geq k_0$.