

**Aufgaben zum Modul „Holomorphe Funktionen und abelsche Varietäten“
(Funktionentheorie II) – Blatt 9**
Abgabe am 10.12.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 32: Charakterisierung von Periodenmatrizen

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen über eine Matrix $\Pi \in M_{n \times 2n}(\mathbb{C})$ äquivalent sind:

- (i) Π ist die Periodenmatrix eines Gitters in \mathbb{C}^n
- (ii) Die $(2n \times 2n)$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} \Pi \\ \bar{\Pi} \end{pmatrix}$$

ist invertierbar. Hier bezeichnet $\bar{\Pi}$ die zu Π komplex konjugierte Matrix.

► **Aufgabe 33: Produkt von Thetafunktionen**

- (a) Es seien f und g Thetafunktionen zu einem gemeinsamen Gitter Λ in \mathbb{C}^n . Zeigen Sie, dass das Produkt $f \cdot g$ eine Thetafunktion ist. Welchen Exponenten hat $f \cdot g$?
- (b) Es sei (λ, μ) ein Exponent mit der Eigenschaft, dass es von null verschiedene Thetafunktionen sowohl zu (λ, μ) als auch zu $(-\lambda, -\mu)$ gibt. Zeigen Sie, dass dann alle von null verschiedenen Thetafunktionen aus $\text{Th}_\Lambda(\lambda, \mu)$ nullstellenfrei sind.

Aufgabe 34: Untertori

Es sei V/Λ ein komplexer Torus. Ist $W \subset V$ ein \mathbb{C} -Untervektorraum und $\Omega \subset W$ ein Gitter in W mit $\Omega \subset \Lambda$, so heißt W/Ω *Untertorus* von V/Λ .

- (a) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
 - (i) V/Λ besitzt einen nicht-trivialen (d.h. einen von V/Λ und 0 verschiedenen) Untertorus.
 - (ii) Es gibt eine nicht-triviale Untergruppe $\Omega \subset \Lambda$, so dass der von Ω aufgespannte \mathbb{R} -Untervektorraum $W \subset V$ ein \mathbb{C} -Vektorraum ist.
- (b) Es sei V'/Λ' ein weiterer komplexer Torus und $F : V \rightarrow V'$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung mit $F(\Lambda) \subset \Lambda'$. Überlegen Sie sich, dass F eine Abbildung

$$\begin{aligned} f : V/\Lambda &\rightarrow V'/\Lambda' \\ v + \Lambda &\mapsto F(v) + \Lambda' \end{aligned}$$

induziert. (Dazu ist zu zeigen dass aus $v + \Lambda = w + \Lambda$ schon $F(v) + \Lambda' = F(w) + \Lambda'$ folgt.)

Zeigen Sie außerdem, dass für einen Untertorus W/Ω von V/Λ das Bild $f(W/\Omega)$ ein Untertorus von V'/Λ' ist.