PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
David Schmitz

Wintersemester 2009/2010

**Aufgaben zum Modul „Holomorphe Funktionen und abelsche Varietäten" (Funktionentheorie II) – Blatt 10**

Abgabe am 17.12.2009 vor der Vorlesung

▸ **Aufgabe 35: Triviale Thetafunktionen**

Zeigen Sie: Für eine Thetafunktion $f$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Für die zu $f$ gehörige hermitesche Form $H$ gilt $H = 0$.

(ii) $f = 0$ oder $f$ ist nullstellenfrei.

Falls $f$ als normiert vorausgesetzt wird, ist außerdem äquivalent:

(iii) Die Funktion $f$ ist konstant.

(Dies erklärt den Begriff „triviale" Thetafunktion.)

**Aufgabe 36: Néron-Severi-Gruppe**

(a) Es sei das Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}^2$ gegeben durch die Periodenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Néron-Severi-Gruppe des komplexen Torus $X = \mathbb{C}^2/\Lambda$.

*Anleitung:*

(1) Gegeben sei eine alternierende $\mathbb{R}$-Form $E$ und die zugehörige hermitesche Form $H(x, y) = E(ix, y) + iE(x, y)$ mit Darstellungsmatrizen $M_E$, $M_H$ bezüglich der Gitterbasis. Zeigen Sie:

$$M_H = I^t M_E + iM_E$$

für eine geeignete Matrix $I$. (Dann ist $I^t M_E = \mathrm{Re}(M_H)$ symmetrisch.)

(2) Finden Sie Bedingungen an $M_E$, so dass $H \in \mathrm{NS}(X)$ gilt, und bestimmen Sie daraus die möglichen Matrizen $M_E$.

(b) Ein Element $H \in \mathrm{NS}(X)$ heißt *Polarisierung* auf $X$ falls $H$ positiv definit ist. Geben Sie eine Polarisierung auf dem komplexen Torus X aus Aufgabenteil (a) an.

**Aufgabe 37: Néron-Severi-Gruppe**

Es sei das Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}^2$ gegeben durch die Periodenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i & \sqrt{2}i \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{3}+i \end{pmatrix}.$$

Gehen Sie vor wie in Aufgabe 36 um zu zeigen, dass es auf $X$ keine Polarisierung (also kein positiv definites $H \in \mathrm{NS}(X)$) gibt.