PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
David Schmitz

Wintersemester 2009/2010

Aufgaben zum Modul „Holomorphe Funktionen und abelsche Varietäten“
(Funktionentheorie II) – Blatt 11
Abgabe am 14.01.2010 vor der Vorlesung

▸ Aufgabe 38: Periodenmatrizen

(a) Sei $X = \mathbb{C}^n/\Lambda$ ein komplexer Torus. Zeigen Sie: Nach einer linearen Koordinatentransformation im $\mathbb{C}^n$ hat X eine Periodenmatrix der Form
$$(E_n, Z)$$
mit $Z \in M_n(\mathbb{C})$ und $\det(\mathrm{Im} Z) \neq 0$. Hier bezeichnet E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix.

(b) Sei $Z \in \mathbb{H}_n$, das heißt $Z \in M_n(\mathbb{C})$, $Z^t = Z$ und die Matrix $\mathrm{Im} Z$ ist positiv definit.
Zeigen Sie: Die hermitesche Form, die durch die Matrix $H := (\mathrm{Im} Z)^{-1}$ bezüglich der Standardbasis gegeben ist, ist eine Polarisierung auf $\mathbb{C}^n/(E_n, Z)\mathbb{Z}^{2n}$.
Hinweis: Die Matrix von E bezüglich der Basis (E_n, Z) ist
$$\mathrm{Im}((E_n, Z)^t H (\overline{E_n, Z})) = \mathrm{Im} \begin{pmatrix} H & H\overline{Z} \\ Z^t H & Z^t H \overline{Z} \end{pmatrix}.$$
Zeigen Sie, dass diese ganzzahlig ist.

▸ Aufgabe 39: Homomorphismen von komplexen Tori

Es seien $X = \mathbb{C}^n/\Lambda$ und $Y = \mathbb{C}^m/\Omega$ komplexe Tori und
$$F : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$$
eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit $F(\Lambda) \subset \Omega$. Nach Aufgabe 35 induziert F eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$.

(a) Zeigen Sie: Ist $H \in \mathrm{NS}(Y)$, so wird durch
$$(F^*H)(x, y) := H(F(x), F(y))$$
ein Element $F^*H \in \mathrm{NS}(X)$ definiert.

(b) Zeigen Sie: Ist θ eine Thetafunktion zu $(H, K) \in \mathcal{P}(Y)$, so ist die Funktion $F^*\theta := \theta \circ F$ eine Thetafunktion zu $(F^*H, F^*K) \in \mathcal{P}(X)$.

(c) Sei $H \in \mathrm{NS}(Y)$ eine Polarisierung. Für welche F ist auch F^*H eine Polarisierung?

Aufgabe 40: Vielfache in der Néron-Severi-Gruppe

Sei X ein komplexer Torus.

(a) Es sei $H_0 \in \mathrm{NS}(X)$ eine Polarisierung und $H \in \mathrm{NS}(X)$ beliebig.
Zeigen Sie: Es existiert eine Zahl $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m > m_0$ das Element $mH_0 + H$ eine Polarisierung ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktionen $f(x) := H(x, x)$ und $f_0(x) := H_0(x, x)$ auf der Menge $\{ x \in \mathbb{C}^n \mid \|x\|_2 = 1 \}$.

(b) Sei $H \in \mathrm{NS}(X)$ vom Typ $(d_1, \ldots, d_s)$.
Zeigen Sie: Es existiert ein $H_0 \in \mathrm{NS}(X)$ mit $H = d_1 H_0$.

(c) Sei $(H, K) \in \mathcal{P}(X)$ mit H vom Typ $(d_1, \ldots, d_s)$.
Zeigen Sie, dass ein $(H_0, K_0) \in \mathcal{P}(X)$ existiert mit $(H, K) = (d_1 H_0, d_1 K_0)$.