PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG Wintersemester 2009/2010
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
David Schmitz

Aufgaben zum Modul „Holomorphe Funktionen und abelsche Varietäten“ (Funktionentheorie II) – Blatt 12

Abgabe am 21.01.2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 41: d-Teilungspunkte

Es sei $X = \mathbb{C}^n/\Lambda$ ein komplexer Torus. Wir betrachten die Menge

$$X_d := \{\, x \in X \mid d \cdot x = 0 \,\}$$

der *d-Teilungspunkte* von X. Zeigen Sie:

$$X_d \cong (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^{2n}\,.$$

Aufgabe 42: Verfeinerungen von Gittern

Es sei $X = \mathbb{C}^n/\Lambda$ ein komplexer Torus und $H \in \mathrm{NS}(X)$ eine Polarisierung. Zeigen Sie: Es existieren nur endlich viele Gitter Λ' mit $\Lambda \subset \Lambda'$, so dass H auch auf $\mathbb{C}^n/\Lambda'$ eine Polarisierung darstellt.

Hinweis: Wählen Sie eine symplektische Basis von Λ und stellen Sie Elemente von Λ', die im Fundamentalparallelotop bezüglich Λ liegen, durch die gewählte Basis dar. Wieviele Möglichkeiten gibt es, bei denen $\mathrm{Im}H|_{\Lambda'\times\Lambda'}$ ganzzahlig ist?

Aufgabe 43: Riemann-Roch-Räume

Sei X eine abelsche Varietät.x

(a) Sei $D \in\mathrm{Div}(X)$, so dass H_D eine Polarisierung vom Typ $(d_1, \ldots, d_n)$ ist. Zeigen Sie:

$$\dim \Gamma(rD) = r^n d_1 \ldots d_n.$$

(b) Seien $D_0, \ldots, D_m$ effektive Divisoren auf X, so dass H_{D_0} eine Polarisierung ist. Zeigen Sie: Es existiert ein Polynom P vom Grad n in $m+1$ Unbestimmten, so dass für alle $r \in \mathbb{N}_0^{m+1}$ mit $r_0 > 0$ gilt

$$\dim \Gamma \left(\sum_{i=0}^{m} r_i D_i \right) = P(r_0, \ldots, r_m).$$