PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
David Schmitz

Wintersemester 2009/2010

Aufgaben zum Modul „Holomorphe Funktionen und abelsche Varietäten“ (Funktionentheorie II) – Blatt 13

Abgabe bis 28.01.2010, 18 Uhr in Raum 07A02 auf den Lahnbergen

Aufgabe 44: Untersysteme
Sei X eine abelsche Varietät, $D \in \operatorname{Div}(X)$ und $p_1, \dots, p_r \in X$. Wir definieren

$$\Gamma(D - p_1 - \ldots - p_r) := \{\, f \in \Gamma(D) \mid f(p_1) = \cdots = f(p_r) = 0 \,\}$$

Zeigen Sie:

(a) Das Untersystem $\Gamma(D - p_1 - \ldots - p_r)$ ist ein komplexer Vektorraum der Dimension $\geq \dim \Gamma(D) - r$.

(b) Falls $\dim \Gamma(D) \geq r$ ist, so existieren Punkte $p_1, \dots, p_r \in X$, so dass gilt:

$$\dim \Gamma(D - p_1 - \ldots - p_r) = \dim \Gamma(D) - r.$$

(c) Zeigen Sie die folgende Verschärfung von (b):
Es gibt Hyperflächen $Y_1, \dots, Y_r \subset X$, so dass alle Tupel $(p_1, \dots, p_r) \in X^r$, für die

$$\dim \Gamma(D - p_1 - \ldots - p_r) = \dim \Gamma(D)$$

gilt, im Produkt der Hyperflächen $Y_1 \times \cdots \times Y_r \subset X^r$ enthalten sind .

Aufgabe 45: Riemann-Roch-Räume
Sei X eine abelsche Varietät und $D \in \operatorname{Div}(X)$. Wir definieren

$$\mathcal{L}(D) := \{\, f \mid f \text{ abelsche Funktion auf } X \text{ und } (f) \geq -D \,\} \cup \{\, 0 \,\}.$$

Zeigen Sie: $\Gamma(D) \cong \mathcal{L}(D)$.
(Sie dürfen benutzen, dass jede abelsche Funktion Quotient zweier Thetafunktionen ist.)

Aufgabe 46: Translate von Divisoren
Sei X ein komplexer Torus und $D \in \operatorname{Div}(X)$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $a, b \in X$ gilt: $D_a = D_b \Leftrightarrow D_{a-b} = D$.

(b) Für alle $a, b \in X$ gilt: $a \in \operatorname{supp}(D_b) \Leftrightarrow b \in \operatorname{supp}(D_a)$.

(c) Seien $a_1, \cdots, a_m \in X$ mit $a_1 + \ldots + a_m = 0$. Dann gilt: $D_{a_1} + \ldots + D_{a_m} \equiv_{\text{lin}} mD$.

(d) Ist D effektiv und $D \equiv_{\text{alg}} 0$, so ist D der Nulldivisor.