PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG — Wintersemester 2009/2010
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
David Schmitz

Aufgaben zum Modul „Holomorphe Funktionen und abelsche Varietäten“ (Funktionentheorie II) – Blatt 14
Abgabe am 04.02.2010 vor der Vorlesung

▸ Aufgabe 47: Translate von Divisoren
Sei X ein komplexer Torus und $D \in \mathrm{Div}(X)$ ein effektiver Divisor mit $D \not\equiv_{\mathrm{alg}} 0$.

(a) Sei $\pi : \mathbb{C}^n \longrightarrow X$ die kanonische Abbildung.
Zeigen Sie: Das Urbild $\pi^{-1}(\mathrm{kern}\,\Phi_D)$ ist eine höchstens abzählbare Vereinigung von affinen Unterräumen des $\mathbb{C}^n$, deren Dimension echt kleiner als n ist.
Hinweis: Zeigen Sie: Bei Wahl einer Gitterbasis $u_1, \ldots, u_{2n}$ gilt

$$\pi^{-1}(\mathrm{kern}\,\Phi_D) = \bigcup_{c \in \mathbb{Z}^{2n}} \{\, a \in \mathbb{C}^n \mid E(a, u_i) = c_i \text{ für } 1 \le i \le 2n \,\}.$$

(b) Zeigen Sie: Für ein festes $a \in \mathbb{C}^n$ ist $\{\, b \in \mathbb{C}^n \mid D_a \equiv_{\mathrm{lin}} D_b \,\}$ eine höchstens abzählbare Vereinigung affiner Unterräume des $\mathbb{C}^n$, deren Dimension kleiner als n ist.

(c) Zeigen Sie: Die Menge $\{\, a \in \mathbb{C}^n \mid D_a \equiv_{\mathrm{lin}} D_{-a} \,\}$ ist eine höchstens abzählbare Vereinigung affiner Unterräume des $\mathbb{C}^n$, deren Dimension kleiner als n ist.

(d) Folgern Sie, dass $a_1, \ldots, a_m \in X$ existieren, so dass

$$mD \equiv_{\mathrm{lin}} D_{a_1} + \ldots + D_{a_m},$$

wobei für $i \neq j$ schon $D_{a_i} \not\equiv_{\mathrm{lin}} D_{a_j}$ ist.

Aufgabe 48: Néron-Severi-Gruppe
Sei $X = \mathbb{C}^n/\Lambda$ ein abelsche Varietät H_0 eine Polarisierung auf X. Wir definieren

$$\mathrm{NS}(X, H_0) := \{\, H \text{ Polarisierung auf } X \text{ mit } H(x,x) \le H_0(x,x) \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{\, 0 \,\} \,\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{NS}(X, H_0)$ endlich ist.
Hinweis: Wählen Sie die Gitterbasis als $\mathbb{R}$-Basis des $\mathbb{C}^n$. Betrachten Sie zu den hermiteschen Formen H_0 und $H \in \mathrm{NS}(X, H_0)$ die zugehörigen Matrizen bezüglich dieser Basis und überlegen Sie sich, dass $\mathrm{spur}(M_H) \le \mathrm{spur}(M_{H_0})$ gilt. Folgern Sie, dass alle Einträge von M_H beschränkt sind. Schließen Sie dann auf die zugehörige alternierende Form E.

Aufgabe 49: Symmetrische Divisoren
Sei X ein komplexer Torus und $D \in \mathrm{Div}(X)$. Für $D = (f)$ mit einer meromorphen Thetafunktion f ist $\imath^* D := (\imath^* f)$, wobei $\imath^* f(x) := f(-x)$. Der Divisor D heißt *symmetrisch*, falls gilt $\imath^* D = D$.
Sei nun $D = (f)$ ein effektiver Divisor mit einer normierten Thetafunktion f. Zeigen Sie: D ist genau dann symmetrisch, wenn f gerade oder ungerade ist (d.h. wenn gilt $\imath^* f = f$ oder $\imath^* f = -f$.