Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2005/06

Übungen zur Stochastik 0/Mathematik III

– Blatt 1 –

Abgabe Freitag, 4.11.2005 Uhr s.t.

Aufgabe 1 (3 Punkte). Seien X und Y Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung, $A, A_i \subset X,\ \ B, B_i \subset Y\ \ \forall\, i \in I$, wobei I eine beliebige Indexmenge sei. Es gelten folgende Aussagen:

a) i) $f^{-1}\Big(\bigcup\limits_i B_i\Big) = \bigcup\limits_i f^{-1}(B_i)$, ii) $f^{-1}\Big(\bigcap\limits_i B_i\Big) = \bigcap\limits_i f^{-1}(B_i)$
iii) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

b) i) $f\Big(\bigcup\limits_i A_i\Big) = \bigcup\limits_i f(A_i)$, ii) $f\Big(\bigcap\limits_i A_i\Big) \subset \bigcap\limits_i f(A_i)$
iii) $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$

c) i) $A \subset f^{-1}(f(A))$, ii) $B \cap f(X) = f(f^{-1}(B))$.

Zeigen Sie exemplarisch die Aussagen a), ii) und b), i), und begründen Sie durch ein Beispiel, dass in b), ii) im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Begründen oder widerlegen Sie, dass auf $\Omega = \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ eine Wahrscheinlichkeits-Verteilung P existiert mit folgenden Eigenschaften:

a) $P(n)$ ist proportional zu
i) $\frac{1}{n^2}$, ii) e^{-n}, iii) $\frac{1}{n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

b) $P(G) = P(U)$, wobei G die geraden, U die ungeraden Zahlen bezeichnet.

c) $P(A_p)$ ist proportional zu $\frac{1}{p^2}$ für alle Primzahlen p, wobei A_p die Menge der natürlichen Zahlen sei, die als kleinsten Primteiler p haben. Für $p = 1$ sei $A_1 := \{1\}$.

Aufgabe 3 (4+2$*$ Punkte). Zu dem Zufallsexperiment eines, im Prinzip beliebig oft wiederholten Münzwurfs wird ein einfaches Spiel vereinbart:
Spieler A gewinnt, wenn zuerst zweimal die 1 hintereinander fällt, Spieler B entsprechend bei 0.

a) Beim ersten Wurf fällt eine 1, das Spiel wird danach aus ungeklärten Gründen abgebrochen.
Wie sollte der Einsatz geteilt werden, wenn ursprünglich $2, 3, 4$ Würfe vereinbart waren. Berücksichtigen Sie dabei auch die Fälle, in denen keiner gewinnt.

b) Vereinbart wird jetzt ein im Prinzip beliebig oft wiederholter Wurf.

i) Geben Sie zwei geeignete Modelle für den Ergebnisraum an, von denen eines nicht diskret ist.

ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass weder A noch B gewinnt?

$*$)iii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt, wenn im ersten Wurf eine 1 gefallen ist?

Aufgabe 4 (mündlich). Die Seiten von zwei Würfeln sind mit den folgenden Zahlen beschriftet:

Würfel 1: 5, 5, 5, 2, 2, 2 Würfel 2: 4, 4, 4, 4, 4, 1

Geben Sie eine Beschriftung für einen dritten Würfel so an, dass das folgende Spiel für den zweiten Spieler vorteilhaft ist: Spieler 1 darf einen der drei Würfel wählen, dann darf Spieler 2 einen der verbleibenden Würfel wählen. Jeder würfelt mit dem von ihm gewählten Würfel, und wer die höhere Augenzahl hat, hat gewonnen.

Zum Erwerb des Übungsscheins der Vorlesung Stochastik 0/Mathematik III sind die folgenden Bedingungen zu erfüllen:

- Regelmäßige und aktive Mitarbeit im Tutorium.
- Von den schriftlich zu bearbeitenden Aufgaben sind 50% der Punkte zu erreichen. (Mit $*$ gekennzeichnete Aufgabenpunkte gehören zum Haben, aber nicht zum Soll.)
- Von den mündlich zu bearbeitenden Aufgaben sind 1/3 vorzubereiten.
- Für einen benoteten Übungsschein ferner: Bestehen einer Klausur.

Bei der Festlegung der Note des Übungsscheins geht das Resultat der Klausur mit dem Faktor 2/3 ein.

Literatur:

Krengel:	Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, Vieweg.
Fischer:	Stochastik einmal anders, Vieweg.
Krickeburg, Ziezold:	Stochastische Methoden, Springer.