

**Übungen zur Stochastik 0/Mathematik III**

– Blatt 7 –

Abgabe Freitag, 16.12.2005 Uhr s.t.

**Aufgabe 25** (4 Punkte). Sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  eine Zufallsvariable und

$$g(t) := \sum_{k=0}^{\infty} P_X(k)t^k \quad \text{die erzeugende Funktion.}$$

Zeigen Sie:

a) Die obige Potenzreihe konvergiert für  $|t| < 1$  und

$$P_X(k) = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}$$

b) Konvergiert die Potenzreihe auch noch in eine Umgebung von 1, so ist  $X \in \mathcal{L}^2$  und

i)  $E(X) = g'(1)$ ,      ii)  $\text{Var}(X) = g''(1) + g'(1) - (g'(1))^2$

c) Ist  $X$  geometrisch verteilt,  $P_X(k) = p \cdot q^{k-1}$  mit  $0 < p < 1$ ,  $p + q = 1$  (sowie  $P_X(0) = 0$ ), so ist

$$g(t) = \frac{pt}{1 - qt}.$$

Berechnen Sie damit nochmals  $E(X)$  und  $\text{Var}(X)$ .

**Aufgabe 26** (mündlich). Seien  $X$  und  $Y$  zwei positive korrelierte Zufallsvariablen auf  $\Omega$ .

a) Zeigen Sie, dass auch  $X$  und  $X + Y$  positiv korreliert sind.

b) Gibt es eine allgemein gültige Aussage für die Korrelation von  $X$  und  $X - Y$ ?

**Aufgabe 27** (4 Punkte). Die Anzahl der von einem Geiger-Zählrohr in einer Zeiteinheit registrierten Teilchen sind Poisson-verteilt,  $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ .

a) Geben Sie für obiges Zufalls-Experiment  $(\mathcal{X}, (P_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta})$  sowie den natürlichen Schätzer  $\hat{\lambda} : \mathcal{X} \rightarrow \Theta$  für  $\lambda$  an.

Begründen Sie Ihre Wahl.

b) Zeigen Sie, dass der Schätzer aus a) auch der Maximum-Likelihood-Schätzer ist.

c) Ist der Schätzer auch erwartungstreu.

**Aufgabe 28** (4 Punkte). Sei  $P$  eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf  $\mathbb{N}$  mit  $P(n) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Zeigen Sie, dass es eine Zufallsvariable  $X : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so dass

a)  $E(X)$  nicht definiert ist,

b)  $E(X)$  definiert ist, aber nicht  $\text{Var}(X)$ .

**Klausurtermin:**

Samstag, 18.2.06, 8-11 Uhr, HS A, Hörsaalgebäude Chemie.