Übungen zur Algebra I, SS 2002

Abgabe am Dienstag, den 16.04.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 1. *(Halbgruppen)*
Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge und $H := \mathrm{Abb}(M, M)$ zusammen mit der Komposition die Halbgruppe der Abbildungen von M nach M.

a) Zeigen Sie, dass ein $f \in H$ genau dann linksinvertierbar ist, wenn f injektiv ist.

b) Zeigen Sie, dass ein $f \in H$ genau dann rechtsinvertierbar ist, wenn f surjektiv ist.

c) Für welche Mengen M ist $(H, \circ)$ kommutativ?

Aufgabe 2. *(Gruppen)*
Sei $(G_i, *_i)_{i \in I}$ eine Familie von Gruppen mit neutralen Elementen $e_i \in G_i$. Wir definieren

$$\begin{aligned} P &:= \{\, (g_i)_{i \in I} \mid g_i \in G_i \,\} \ , \\ S &:= \{\, (g_i)_{i \in I} \mid g_i \in G_i \text{ und es gilt bis auf endlich viele Ausnahmen } g_i = e_i \,\} \ . \end{aligned}$$

Definieren Sie naheliegende binäre Verknüpfungen auf P und S, und weisen Sie nach, dass P und S mit diesen Verknüpfungen Gruppen sind.

Aufgabe 3. *(Verknüpfungstafeln)*

a) Sei $G = \{\, g_1, g_2, \ldots, g_n \,\}$ zusammen mit der Verknüpfung $*$ eine endliche Gruppe. Die Matrix $M_G := \big(g_i * g_j\big)_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$ heisst Verknüpfungstafel von $(G, *)$. Beweisen Sie, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte von M_G jedes Element von G genau einmal vorkommt. Geben Sie ein Kriterium für die Kommutativität von G an.

b) Beweisen Sie, dass es bis auf Benennung der Elemente genau eine Gruppe mit zwei und genau eine mit drei Elementen gibt. Sind diese Gruppen kommutativ?

(Hinweis: Betrachten Sie die möglichen Verknüpfungstafeln. Versuchen Sie die $27 = 3^3$ Fälle beim Nachweis der Assoziativität der Gruppe mit drei Elementen argumentativ auf möglich wenige Fälle zu reduzieren (Kommutativität, etc.).)