

Übungen zur Algebra I, SS 2002

Abgabe am Dienstag, den 23.04.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 4. (Erzeugende Mengen)

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $M \neq \emptyset$ eine Teilmenge von G . Die Menge

$$\langle M \rangle := \bigcap \{ U \mid U \subset G \text{ Untergruppe mit } M \subset U \}$$

heißt das Erzeugnis von M .

- a) Zeigen Sie, dass $\langle M \rangle$ die kleinste Untergruppe von G ist, welche M enthält.
- b) Zeigen Sie, dass gilt

$$\langle M \rangle = \{ a_1 \cdot \dots \cdot a_r \mid a_i \in M \text{ oder } a_i^{-1} \in M, r \in \mathbb{N} \}.$$

- c) Geben Sie (ohne Beweis) Teilmengen M_1 , bzw. M_2 von $G_1 := (S_n, \circ)$, bzw. $G_2 := (\text{Gl}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ an, die diese Gruppen erzeugen, d.h. $\langle M_i \rangle = G_i$.

Aufgabe 5. (Direktes Produkt von Untergruppen)

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und U sowie V Untergruppen von G , so dass $U \cap V = \{e\}$ und $U \cdot V = G$ gilt ($U \cdot V := \{u \cdot v \mid u \in U, v \in V\}$).

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (i) Die Abbildung

$$\begin{aligned} U \times V &\rightarrow G \\ (u, v) &\mapsto u \cdot v \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus.

- (ii) Für alle $u \in U$ und $v \in V$ gilt $u \cdot v = v \cdot u$.

Aufgabe 6. (Index von Untergruppen)

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und U sowie V Untergruppen mit $V \subset U \subset G$.

- a) Sei $\{a_1 \cdot U, \dots, a_k \cdot U\}$ die Menge aller Linksnebenklassen von U in G und $\{b_1 \cdot V, \dots, b_l \cdot V\}$ die Menge aller Linksnebenklassen von V in U .
Beweisen Sie, dass

$$\{ (a_i \cdot b_j) \cdot V \mid i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, l\} \}$$

die Menge aller Linksnebenklassen von V in G ist.

- b) Beweisen Sie, dass gilt $[G : U] \cdot [U : V] = [G : V]$.