Übungen zur Algebra I, SS 2002

Abgabe am Dienstag, den 23.04.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 4. *(Erzeugende Mengen)*
Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe und $M \neq \emptyset$ eine Teilmenge von G. Die Menge

$$\langle M \rangle := \bigcap \{\, U \mid U \subset G \text{ Untergruppe mit } M \subset U \,\}$$

heißt das Erzeugnis von M.

a) Zeigen Sie, dass $\langle M \rangle$ die kleinste Untergruppe von G ist, welche M enthält.

b) Zeigen Sie, dass gilt

$$\langle M \rangle = \left\{\, a_1 \cdot \cdots \cdot a_r \mid a_i \in M \text{ oder } a_i^{-1} \in M, r \in \mathbb{N} \right\} \; .$$

c) Geben Sie (ohne Beweis) Teilmengen M_1, bzw. M_2 von $G_1 := (S_n, \circ)$, bzw. $G_2 := (\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ an, die diese Gruppen erzeugen, d.h $\langle M_i \rangle = G_i$.

Aufgabe 5. *(Direktes Produkt von Untergruppen)*
Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe und U sowie V Untergruppen von G, so dass $U \cap V = \{\, e \,\}$ und $U \cdot V = G$ gilt $(U \cdot V := \{\, u \cdot v \mid u \in U, v \in V \,\})$.
Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} U \times V & \to & G \\ (u,v) & \mapsto & u \cdot v \end{array}$$

ist ein Isomorphismus.

(ii) Für alle $u \in U$ und $v \in V$ gilt $u \cdot v = v \cdot u$.

Aufgabe 6. *(Index von Untergruppen)*
Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe und U sowie V Untergruppen mit $V \subset U \subset G$.

a) Sei $\{\, a_1 \cdot U, \ldots, a_k \cdot U \,\}$ die Menge aller Linksnebenklassen von U in G und $\{\, b_1 \cdot V, \ldots, b_l \cdot V \,\}$ die Menge aller Linksnebenklassen von V in U.
Beweisen Sei, dass

$$\{\, (a_i \cdot b_j) \cdot V \mid i \in \{\, 1, \ldots, k \,\}, j \in \{\, 1, \ldots, l \,\} \,\}$$

die Menge alle Linksnebenklassen von V in G ist.

b) Beweisen Sie, dass gilt $[G : U] \cdot [U : V] = [G : V]$.