Übungen zur Algebra I, SS 2002

Abgabe am Dienstag, den 30.04.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 7. *(Normalteiler)*
Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(G)$.

a) Zeigen Sie, dass die Menge aller inneren Automorphismen ein Normalteiler von $\mathrm{Aut}(G)$ ist.

b) Sei U eine Untergruppe von G. Zeigen Sie, dass

$$V := \bigcap_{x \in G} x \cdot U \cdot x^{-1}$$

ein Normalteiler von G ist.
Zeigen Sie ferner, dass V der größte Normalteiler von G ist, der in U enthalten ist.

c) Sei U eine endliche Untergruppe von G mit $|U| = n$. Zeigen Sie, falls U die einzige Untergruppe von G der Ordnung n ($|U| = n$) ist, so ist U Normalteiler.

Aufgabe 8. *(Äquivalenzrelationen)*
Wir betrachten die Relation auf $\mathbb{R}^2$

$$(x, y) \sim (x', y') \quad :\Leftrightarrow \quad |x - y| = |x' - y'| \ .$$

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2$ darstellt.

b) Beschreiben Sie die Äquivalenzklassen $[(x_0, y_0)]$ geometrisch (Teilmengen der Ebene).

c) Zeigen Sie, dass $N := [(0, 0)]$ ein Normalteiler in $(\mathbb{R}^2, +)$ ist.

d) Erläutern Sie, ob (oder ob nicht) gilt $G/N = G/\sim$.

Aufgabe 9. *(Kongruenzrelationen)*
Im folgenden ist jeweils eine Gruppe G und eine Relation $\sim$ auf G gegeben. Prüfen Sie, ob $\sim$ eine Kongruenzrelation auf G ist und geben Sie gegebenenfalls den zugehörigen Normalteiler $N \subset G$ an.

a) $G = \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, $\quad A \sim B \ :\Leftrightarrow \ \det(A) = \det(B)$.

b) $G = \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, $\quad A \sim B \ :\Leftrightarrow \ \mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(B)$.

c) $G = \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, $\quad A \sim B \ :\Leftrightarrow \ A = \lambda \cdot B$ für ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

d) $G = \{$ Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}\}$ mit gliedweiser Addition,
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \ :\Leftrightarrow \ (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge.

e) $G = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $\quad A \sim B \ :\Leftrightarrow \ \mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(B)$.

f) $G = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $\quad A \sim B \ :\Leftrightarrow \ A - B$ hat keine negativen Eigenwerte.

g) $G = \mathrm{S}_n$, $\quad \sigma \sim \tau \ :\Leftrightarrow \ \sigma(1) = \tau(1)$.

h) $G = (\mathbb{R}^n, +)$, $\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad :\Leftrightarrow \ x_n = y_n$.

(Hinweis: Die Normalteilereigenschaft einer Teilmenge N läßt sich leicht feststellen, indem man einen geeigneten Homomorphismus angibt, dessen Kern gleich N ist.)