Übungen zur Algebra I, SS 2002

Abgabe am Dienstag, den 07.05.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 10. *(Zentrum)*
Es sei G eine Gruppe. Die Menge

$$Z(G) := \{\, a \in G \mid xa = ax \;\forall\, x \in G \,\}$$

heißt *Zentrum* von G. Zeigen Sie, dass $Z(G)$ ein Normalteiler in G ist und dass $G/Z(G)$ isomorph zu der Gruppe der inneren Autmorphismen von G ist.

Aufgabe 11. *(Isomorphiesätze)*
Sei G eine Gruppe, $X \neq \emptyset$ eine Menge und Y eine Teilmenge von X.

a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Abb}(X,G)$ aller Abbildungen von X nach G zusammen mit der punktweisen Verknüpfung $f \cdot g := (x \mapsto f(x) \cdot g(x))$ eine Gruppe ist.

b) Wir setzen $I_{Y|X} := \{\, f \in \mathrm{Abb}(X,G) \mid f(y) = 1_G \;\forall\, y \in Y \,\}$. Zeigen Sie, dass $I_{Y|X}$ ein Normalteiler in $\mathrm{Abb}(X,G)$ ist und dass $\mathrm{Abb}(X,G)/I_{Y|X}$ isomorph zu $\mathrm{Abb}(Y,G)$ ist.

c) Sei Z eine Teilmenge von Y. Zeigen Sie, dass gilt

$$\left(\mathrm{Abb}(X,G)/I_{Y|X}\right) \Big/ \left(I_{Z|X}/I_{Y|X}\right) \cong \mathrm{Abb}(Z,G) \quad .$$

Aufgabe 12. *(Direkte Produkte, Normalisator)*
Es sei G eine Gruppe.

a) Seien U und V Untergruppen von G, so dass $U \cap V = \{\, 1_G \,\}$ und $U \cdot V = G$ gilt. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} U \times V & \to & G \\ (u,v) & \mapsto & u \cdot v \end{array}$$

ist ein Isomorphismus.

(ii) Die Untergruppen U und V sind Normalteiler.

(Hinweis: Vergleichen Sie mit Aufgabe 5.)

b) Sei U eine Untergruppe von G. Die Menge

$$\mathrm{Nor}(U) := \left\{\, a \in G \mid a^{-1} \cdot U \cdot a \subset U \,\right\}$$

nennen wir den *Normalisator* von U in G. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Nor}(U)$ die größte Untergruppe von G ist, in der U Normalteiler ist.

c) Sei $p \neq 2$ eine Primzahl, und es gelte $|G| = 2p$. Weiterhin gebe es $a, b \in G$ mit $\mathrm{ord}(a) = p$ und $\mathrm{ord}(b) = 2$, so dass $\langle b \rangle$ Normalteiler in G ist.
Zeigen Sie:

(i) $\mathrm{Nor}(\langle a \rangle) = G$,

(ii) $G \cong \langle a \rangle \times \langle b \rangle$,

(iii) G ist abelsch .