Übungen zur Algebra I, SS 2002

Abgabe am Dienstag, den 14.05.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 13. *(Kongruenzabbildungen)*
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{R}^2$ sei $\delta_{p,\alpha} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung um den Punkt p um den Winkel α und $\tau_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Translation (Verschiebung) um p. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $p, q \in \mathbb{R}^2$ die Ordungen der folgenden Untergruppen von $\mathrm{Kon}(\mathbb{R}^2)$:

a) $\langle \tau_p \rangle$
b) $\langle \delta_{p,\alpha} \rangle$
c) $\langle \delta_{p,\alpha}, \delta_{p,\beta} \rangle$
d) $\langle \delta_{p,\alpha}, \tau_q \rangle$

Welche dieser Gruppen sind abelsch, welche zyklisch? Falls eine dieser Gruppen nicht zyklisch, aber trotzdem abelsch ist, so geben Sie zyklische Untergruppen an, so dass die Gruppe isomorph zu dem Produkt dieser Untergruppen ist.

Aufgabe 14. *(Symmetriegruppe, Diedergruppe)*
Sei M eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. Eine *Symmetrie* von M ist eine Kongruenzabbildung $\sigma \in \mathrm{Kon}(\mathbb{R}^2)$ mit $\sigma(M) = M$.

a) Beweisen Sie, dass die Menge aller Symmetrien von M eine Untergruppe von $\mathrm{Kon}(\mathbb{R}^2)$ ist, die *Symmetriegruppe* von M.
b) Wir betrachten die Punktmenge

$$\left\{ \exp(\frac{2\pi \cdot i}{n}), \exp(2 \cdot \frac{2\pi \cdot i}{n}), \ldots, \exp(n \cdot \frac{2\pi \cdot i}{n}) \right\} \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 ,$$

ein *regelmässiges n-Eck*. Bestimmen Sie die Symmetriegruppe D_n des regelmässigen n-Ecks, die sogenannte *Diedergruppe*, und zeigen Sie, dass D_n ein Element der Ordung n enthält.
c) Es einen δ, τ die folgenden Permutationen.

$$\delta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \quad \delta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \ldots & 3 & 2 \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie: $D_n \cong \langle \delta, \tau \rangle$.

Aufgabe 15. *(Exponent)*
Es sei G eine endliche abelsche Gruppe. Die Zahl

$$\mathrm{Exp}(G) := \min \{ n \in \mathbb{N} \mid a^n = 1 \text{ für alle } a \text{ aus } G \}$$

heißt *Exponent* von G. Beweisen Sie:

a) Für alle $g \in G$ gilt: $\mathrm{ord}(g) \big| \mathrm{Exp}(G)$.
b) Es gibt natürliche Zahlen $d_1, \ldots, d_s$ mit $d_i \big| d_{i+1}$ für alle $i \in \{ 1, \ldots, s-1 \}$, so dass gilt:

$$G \cong \mathbb{Z}_{d_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{d_s} .$$

(Zusatz: Zeigen Sie, dass die Zahlen d_i eindeutig sind.)
c) Es gilt $\mathrm{Exp}(G) = \max \{ \mathrm{ord}(g) \mid g \in G \}$.
d) G ist zyklisch, genau dann wenn $|G| = \mathrm{Exp}(G)$ gilt.