Übungen zur Algebra I, SS 2002

Abgabe am Dienstag, den 21.05.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 16.

a) Zeigen Sie: $\mathbb{R}^{n+k}\big/(\{0\}^n \times \mathbb{R}^k) \cong \mathbb{R}^n$.

b) Es sei $T(\mathbb{R}^n)$ die Gruppe der Translationen von $\mathbb{R}^n$ und $O(\mathbb{R}^n)$ die Gruppe der orthogonalen Abbildungen. Zeigen Sie: $\operatorname{Kon}(\mathbb{R}^n)\big/T(\mathbb{R}^n) \cong O(\mathbb{R}^n)$.

c) Zeigen Sie: $\mathbb{R}\big/\mathbb{Z} \cong SO_2(\mathbb{R})$.
(Hinweis: Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass eine Matrix $A \in SO_2(\mathbb{R})$ von der Form $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ ist mit einer reellen Zahl α.)

Aufgabe 17. *(Konjugierte Untergruppen)*
Es sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe von G. Eine Untergruppe V von G heißt konjugiert zu U, falls es ein $x \in G$ gibt mit $x^{-1} \cdot U \cdot x = V$. Die Menge

$$\operatorname{Nor}(U) := \left\{ a \in G \,|\, a^{-1} \cdot U \cdot a = U \right\}$$

nennen wir den *Normalisator* von U in G. Zeigen Sie, dass die Anzahl der zu U konjugierten Untergruppen gleich dem Index von $\operatorname{Nor}(U)$ in G ist.
(Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Operation von G auf der Menge der Untergruppen von G.)

Aufgabe 18. *(Fixpunkte)*
Eine Gruppe G operiere auf der Menge X. Ein Element $a \in X$ heißt *Fixpunkt* der Operation von G auf X, falls $g * a = a$ für alle $g \in G$ gilt.
Beweisen Sie, dass im Fall $|G| = 35$ und $|X| = 13$ immer ein solcher Fixpunkt existiert.