# Übungen zur Algebra I, SS 2002

Abgabe am Dienstag, den 28.05.2002 vor der Vorlesung

**Aufgabe 19.**
Es sei $p$ eine Primzahl, $r$ eine natürliche Zahl und $G$ eine Gruppe der Ordung $p^r$.

a) Zeigen Sie, dass $G$ einen Normalteiler $N$ der Ordnung $p$ besitzt.
(Hinweis: Suchen Sie eine entsprechende Untergruppe des Zentrums von $G$.)

b) Sei $\pi : G \to G/N$ der kanonische Homomorphismus. Zeigen Sie: Falls $r \geq 2$ ist und $G/N$ einen Normalteiler $M$ der Ordnung $p^{r-2}$ besitzt, so ist $\pi^{-1}(M)$ ein Normalteiler der Ordnung $p^{r-1}$ in $G$.

c) Beweisen Sie durch Induktion nach $r$, dass $G$ einen Normalteiler der Ordung $p^{r-1}$ besitzt.

**Aufgabe 20.** *(Sylowsätze)*

a) Beweisen Sie, dass jede Gruppe der Ordung 200 einen nicht-trivialen Normalteiler besitzt.

b) Seien $p$ und $q$ zwei verschiedene Primzahlen. Beweisen Sie, dass jede Gruppe der Ordung $p \cdot q$ einen nicht-trivialen Normalteiler besitzt.

(Hinweis: Sie dürfen die Sylowsätze $I - III$ benutzen.)

**Aufgabe 21.** *(Lineare Endomorphismen)*
Sei $V$ ein - möglicherweise unendlichdimensionaler - Vektorraum über dem Körper $K$ und $\mathrm{End}_K(V)$ die Menge der $K$-linearen Abbildungen von $V$ nach $V$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{End}_K(V)$ mit den Verknüpfungen $+$ und $\circ$ ein Ring ist ( $f+g(x) := f(x)+g(x)$, $f \circ g(x) := f(g(x))$ ) .

b) Bestimmen Sie die Nullteiler in $\mathrm{End}_K(V)$.

c) Geben Sie einen zu $K$ isomorphen Unterring von $\mathrm{End}_K(V)$ an.