Übungen zur Algebra I, SS 2002

Abgabe am Dienstag, den 04.06.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 22. *(Ideale)*
Es sei R ein kommutativer Ring. Für Ideale I und J in R definiert man:

$$\begin{aligned} I + J &:= \{ a + b \,|\, a \in I, b \in J \} , \\ I \cdot J &:= \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \,|\, a_i \in I, b_i \in J, n \in \mathbb{N} \right\} . \end{aligned}$$

Beweisen Sie:

a) Die Mengen $I + J$ und $I \cdot J$ sind Ideale in R.
(Zusatz: Die Menge $\{ a \cdot b \,|\, a \in I, b \in J \}$ stellt im Allgemeinen kein Ideal dar.)

b) $I + J$ ist das kleinste Ideal in R, das I und J enthält, und es gilt $I \cdot J \subset I \cap J$.

c) Für Ideale I, J und K in R gilt: $I \cdot (J + K) = I \cdot J + I \cdot K$.

Aufgabe 23. *(Einheiten)*

a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Z}[i] := \{ a + ib \,|\, a, b \in \mathbb{Z} \}$ ein Unterring von $\mathbb{C}$ ist.

b) Bestimmen Sie die Gruppe der Einheiten in folgenden Ringen:

(i) $\mathbb{Z}[i]$,

(ii) $\mathrm{End}(G) := \{ \text{Endomorphismen von } G \}$ für eine Gruppe G ,

(iii) $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}) := \{ k\text{-fach st. diffb. Abb. von } U \text{ nach } \mathbb{R} \}$ für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$,

(iv) $R_1 \times R_2$ für zwei Ringe R_1 und R_2 .

Aufgabe 24. *(Lokalisierung)*
Sei S eine nichtleere Teilmenge eines kommutativen Ringes R, so dass gilt:

- $1 \in S$, $0 \notin S$.
- Für alle $a, b \in S$ gilt $ab \in S$.

Auf der Menge $B := \{ (a, b) \,|\, a \in R, b \in S \}$ definieren wir die Relation

$$(a, b) \sim (c, d) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists\, s \in S : s(ad - cb) = 0 .$$

Zeigen Sie:

a) Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf B.

b) Die binären Verknüpfungen $[(a, b)] + [(c, d)] := [(ad + bc, bd)]$ und $[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac, bd)]$ sind wohldefiniert auf $B/\sim$, und $B/\sim$ ist zusammen mit diesen Verknüpfungen ein kommutativer Ring.

c) Die Abbildung
$$\begin{aligned} F : \quad R &\rightarrow B/\sim \\ a &\mapsto [(a, 1)] \end{aligned}$$
ist ein Ringhomomorphismus.

d) F ist genau dann injektiv, wenn S keine Nullteiler enthält.

Man nennt den Ring $B/\sim$ die Lokalisierung von R nach S und schreibt R_S.