Übungen zur Algebra I, SS 2002

Abgabe am Dienstag, den 18.06.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 28. *(Ideale im Matritzenring)*
Sei K ein Körper.

a) Es sei $A \in M_n(K)$ nicht die Nullmatrix und $x \in K^n \setminus \mathrm{Kern}(A)$. Zeigen Sie:

   (i) Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es eine Matrix $B_i \in M_n(K)$ mit $B_i A x = e_i$, wobei e_i der i-te Einheitsvektor in K^n sei.

   (ii) Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es eine Matrix $C_i \in M_n(K)$ mit $C_i e_j = \delta_{ij} x$ für $j = 1, \ldots, n$.

   (iii) Es gilt $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} B_i A C_i = \mathbf{1}_n$, wobei $\mathbf{1}_n$ die Einheitsmatrix in $M_n(K)$ bezeichnet.

b) Folgern Sie, dass es in $M_n(K)$ nur die trivialen Ideale gibt.

Aufgabe 29. *(Lokale Ringe)*
Es sei R ein kommutativer Ring und R^* die Einheitengruppe in R. Wir nennen R einen *lokalen Ring*, wenn er nur ein einziges maximales Ideal besitzt.

a) Zeigen Sie: R ist genau dann ein lokaler Ring, wenn die Menge $R \setminus R^*$ der Nichteinheiten ein Ideal in R ist.

b) Sei $P \neq R$ ein Primideal in R und $R_{R\setminus P}$ die Lokalisierung von R nach $R\setminus P$. Beweisen Sie, dass $R_{R\setminus P}$ ein lokaler Ring ist.

Aufgabe 30. *(Kongruenzen in Polynomringen)*
Im Ring $R := \mathbb{Z}_5[X]$ betrachten wir die Ideale $I := R \cdot (X^2 + 1)$ und $J := R \cdot (X^3 - 1)$.

a) Zeigen Sie, dass $I + J = R$ gilt, indem Sie eine Darstellung der Eins ($1 = f(X) \cdot (X^2 + 1) + g(X) \cdot (X^3 - 1)$) konstruieren.

b) Lösen Sie die folgenden simultanen Kongruenzen in R:

$$\begin{aligned} h(X) &\equiv X^5 - 3X^2 + 4 && \mod (X^2+1)\ , \\ h(X) &\equiv 2X^3 - X && \mod (X^3-1)\ . \end{aligned}$$