Übungen zur Algebra I, SS 2002

Abgabe am Dienstag, den 25.06.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 31. Es sei

$$R_1 := \mathbb{R}[X]/(X^2-1)\ , \quad R_2 := \mathbb{R}[X]/(X^2+1)\ , \quad R_3 := \mathbb{R}[X]/(X^2)\ .$$

a) Zeigen Sie: $R_1 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
(Hinweis: Chinesischer Restsatz.)

b) Zeigen Sie: $R_2 \cong \mathbb{C}$.

c) In welchen der Ringe R_1, R_2, R_3 gibt es *nilpotente Elemente*, d.h. $a \neq 0$ mit $a^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$?

d) Welche der Ringe sind Integritätsringe?

e) Zeigen Sie, dass die Ringe paarweise nicht isomorph sind.

Aufgabe 32.

a) Sei R ein kommutativer Ring und $f \in R[X]$. Zeigen Sie:

$$R[X,Y]\big/_{(f)} \quad \cong \quad \left(R[X]\big/_{(f)}\right)[Y]\ .$$

(Hinweis: Beachten Sie, dass (f) auf der linken Seite der Gleichung $f \cdot R[X,Y]$, auf der rechten Seite aber $f \cdot R[X]$ bedeutet.)

b) Zeigen Sie:

$$\mathbb{R}[Y] \times \mathbb{R}[Y] \ \cong\ \mathbb{R}[X,Y]\big/_{(X^2-1)} \ \cong\ (\mathbb{R} \times \mathbb{R})\,[Y]\ .$$

Aufgabe 33. Sei R ein Integritätsring und $a \in R$ keine Einheit. Beweisen Sie, dass das von a und X in $R[X]$ erzeugte Ideal kein Hauptideal ist.
(Hinweis: Dies ist ein alternativer Beweis für die Aussage der Vorlesung, dass der Polynomring über R nur dann ein Hauptidealring sein kann, wenn R ein Körper ist.)