Übungen zur Algebra I, SS 2002

Abgabe am Dienstag, den 02.07.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 34. *(Größte gemeinsame Teiler)*

a) Es seien die ganzen Zahlen $a := 1561523$ und $b := 4280689$ gegeben. Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler von a und b, und finden Sie ganze Zahlen λ und μ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = \lambda \cdot a + \mu \cdot b$.

b) Es seien die Polynome $p := X^6 + 3X^4 - 2$ und $q := 2X^5 + 4X^3 + 2X$ gegeben. Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler von p und q in $\mathbb{R}[X]$, und finden Sie Polynome g und f aus $\mathbb{R}[X]$ mit $\mathrm{ggT}(p, q) = g \cdot p + f \cdot q$.

Aufgabe 35. *(Nicht jedes irreduzible Element ist Primelement)*
Zeigen Sie:

a) Die Menge $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \left\{ a + b\sqrt{-5} \,|\, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ ist ein Unterring von $\mathbb{C}$.

b) Die sogenannte *Norm-Abbildung*

$$\begin{array}{rccc} N: & \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] & \to & \mathbb{N} \\ & a + b\sqrt{-5} & \mapsto & a^2 + 5b^2 \end{array}$$

besitzt die Eigenschaft $N(x \cdot y) = N(x) \cdot N(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

c) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]^* = \{ 1, -1 \}$

d) Die Zahl $2 + \sqrt{-5}$ ist kein Primelement in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
(Hinweis: $(2 + \sqrt{-5}) \cdot (2 - \sqrt{-5}) = 3 \cdot 3$.)

e) Die Zahl $2 + \sqrt{-5}$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Aufgabe 36.

a) Sei R ein Integritätsring und $p \in R \setminus \{ 0 \}$ keine Einheit. Zeigen Sie, dass das Hauptideal (p) genau dann ein Primideal ist, wenn p ein Primelement in R ist.

b) Sei R nun ein Hauptidealring und $p \in R \setminus \{ 0 \}$ keine Einheit. Zeigen Sie, dass (p) genau dann ein maximales Ideal ist, wenn p ein irreduzibles Element in R ist.