Zusatzübung zur Algebra I, SS 2002

Abgabe am Dienstag, den 09.07.2002 vor der Vorlesung.
Die Abgabe ist freiwillig, die Bearbeitung wird allerdings sehr empfohlen.
Eine Lösungsskizze wird am Abgabetag auf der Vorlesungsseite veröffentlicht.

Aufgabe 37. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Es werden **keine** Begründungen verlangt. Falsch beantwortete Teilaufgaben ergeben Punktabzüge.

a) Ist R ein Euklidischer Ring, so ist $R[X]$ ein faktorieller Ring.

b) Ist R ein Integritätsring, so ist $R[X]$ ein Euklidischer Ring.

c) Ist $R[X]$ ein Hauptidealring, so ist R ein Hauptidealring.

d) Ist R ein Hauptidealring, so ist $R[X]$ ein Hauptidealring.

e) Ist R ein Körper, so ist $R[X, Y]$ ein Euklidischer Ring.

f) Ist $R[X, Y]$ ein faktorieller Ring, so ist R ein faktorieller Ring.

g) Ist R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal M, so ist $(R/M)[X]$ ein Euklidischer Ring.

h) In einem Euklidischen Ring sind alle irreduziblen Elemente auch Primelemente.

Aufgabe 38. *(Irreduzible Elemente in $\mathbb{R}[X]$)*

a) Sei f ein Polynom in $\mathbb{R}[X]$ und z eine komplexe Zahl mit $f(z) = 0$. Zeigen Sie, dass auch die komplex konjugierte Zahl $\overline{z}$ eine Nullstelle von f ist.

b) Zeigen Sie, dass jedes Polynom f mit reellen Koeffizienten in Faktoren $f_i \in \mathbb{R}[X]$ mit $\deg(f_i) \leq 2$ zerfällt:

$$f = f_1 \cdot \cdots \cdot f_l \ .$$

(Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass in $\mathbb{C}[X]$ jedes Polynom in Linearfaktoren zerfällt.)

c) Bestimmen Sie alle irreduziblen Elemente in $\mathbb{R}[X]$.

Aufgabe 39. *(Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten)*

a) Es sei $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und $\frac{a}{b}$ mit teilerfremden $a, b \in \mathbb{Z}$ eine rationale Nullstelle von f. Zeigen Sie:

$$a \mid a_0 \qquad \text{und} \qquad b \mid a_n \ .$$

b) Sei f ein normiertes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Beweisen Sie, dass alle Nullstellen von f ganzzahlig sind.

c) Bestimmen Sie alle rationalen Nullstellen des Polynoms $X^{42} + 2X^{27} - 2X^2 - 1$.

Bitte wenden!

Aufgabe 40. *(Irreduzibilitätskriterien)*
Untersuchen Sie die folgenden Polynome auf Irreduzibilität:

a) $2X^4 + 3X^2 + 12X + 6 \in \mathbb{Z}[X]$ bzw. $\mathbb{Q}[X]$,

b) $X^n - T \in (\mathbb{R}(T))\,[X]$,
(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass T ein Primelement in $\mathbb{R}[T]$ ist.)

c) $2X^3 + X^2 + 3X + 20 \in \mathbb{Z}[X]$ bzw. $\mathbb{Q}[X]$.

Die **Klausur** zur Algebra I findet an folgendem Termin statt:
Donnerstag, 11.07.2002, 8:45-10:45 Uhr in HG 4.