Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer, Chr. Schulz

Sommersemester 2002

Klausur zur Algebra I, SS 2002
Donnerstag, den 10.07.2002, **08.45 - 10.45 Uhr**

Name								
Matrikelnummer								
Tutorengruppe								
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Erreichbare Punkte	10	$5+5$	10	$5+5$	$3+4+3$	$5+5$	$7+3$	70
Erreichte Punkte								

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen!
Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Sollte der Platz unter der Aufgabenstellung und auf der Rückseite des Aufgabenblattes nicht ausreichen, so benutzen Sie bitte die leeren Blätter am Ende der Klausur.
Geben Sie die Klausur möglichst nach Aufgaben geordnet und geheftet ab (ein Hefter befindet sich bei der Abgabestelle).
Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen.

Wir wünschen viel Erfolg!

Aufgaben:

Aufgabe 1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Siehe dort!

Aufgabe 2. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und seien M und N Normalteiler in G.

a) Zeigen Sie, dass $M \cdot N := \{\, m \cdot n \mid m \in M, n \in N \,\}$ ein Normalteiler in G ist.

b) Zeigen Sie, dass $G = M \cdot N$ gilt, falls es keinen Normalteiler N' in G gibt mit $N \subsetneq N' \subsetneq G$ und falls gilt $M \not\subset N$.

Aufgabe 3. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) G besitzt nur die trivialen Untergruppen $\{\, 1 \,\}$ und G.

(ii) Die Ordnung von G ist eine Primzahl.

Aufgabe 4. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und N ein Normalteiler in G. Beweisen Sie:

a) Falls der Index $k := [G : N]$ endlich ist, so gilt für alle $x \in G$:

$$x^k \in N \quad .$$

b) Es gibt keine echten Untergruppen von $(\mathbb{R}, +)$ mit endlichem Index.

Aufgabe 5. Seien R, S und T Ringe und $f : R \to T$ sowie $g : S \to T$ Ringhomomorphismen. Es sei $F := \{\, (r, s) \in R \times S \mid f(r) = g(s) \,\}$.

a) Zeigen Sie, dass F ein Unterring von $R \times S$ ist.

b) Beweisen Sie, dass $\mathrm{kern}(f) \times \{\, 0 \,\}$ ein Ideal in F ist, und dass gilt:

$$F/(\mathrm{kern}(f) \times \{\, 0 \,\}) \cong g^{-1}(f(R)) \quad .$$

c) Nun gelte $1 \neq 0$ in R, S und T, und sei S ein Integritätsring.

(i) Zeigen Sie, dass gilt $g^{-1}(f(R)) \neq \{\, 0 \,\}$.

(ii) Ist $\mathrm{kern}(f) \times \{\, 0 \,\}$ ein Primideal in F?

Aufgabe 6. Es seien die Polynome $f := X^3 - 3X^2 + 3X - 2$ und $g := X^3 + 2X^2 - 2X + 3$ aus $\mathbb{Z}[X]$ gegeben.

a) Gibt es Polynomen $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}[X]$ mit

$$f \cdot p_1 + g \cdot p_2 = 27X + 42 \quad ?$$

b) Ist das von f und g in $\mathbb{Q}[X]$ erzeugte Ideal (f, g) Hauptideal, Primideal, maximales Ideal?

Aufgabe 7.

a) Zerlegen Sie das Polynom $X^4 - 4$ in $\mathbb{Z}[X]$, in $\mathbb{Q}[X]$ und in $\mathbb{R}[X]$ in Produkte von irreduziblen Elementen.

b) Zeigen Sie, dass das Polynom $2X^{27} - 42X^{19} + 21X^3 + 14$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

Aufgabe 1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. **Kreuzen Sie die entsprechende Antwort an.** Es werden **keine** Begründungen verlangt. Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe ergibt einen Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht gewertet.

1. Sei $\sim$ eine Kongruenzrelation auf der Gruppe G und $x \in G$. Dann ist die Äquivalenzklasse von x ein Normalteiler in G. *richtig* □ *falsch* □

2. Das Produkt $G_1 \times G_2$ zweier zyklischer Gruppen G_1 und G_2 ist wieder zyklisch. *richtig* □ *falsch* □

3. Die Gruppe G operiere auf der Gruppe H. Dann ist die Bahn eines Elements $x \in H$ eine Untergruppe von H. *richtig* □ *falsch* □

4. Sei R ein Ring und 0_R das Nullelement von R. Das Ideal (0_R) ist genau dann ein Primideal, wenn R nullteilerfrei ist. *richtig* □ *falsch* □

5. In einem kommutativen Ring mit $1_R \neq 0_R$ gibt es keine Elemente, die zugleich Einheiten und Nullteiler sind. *richtig* □ *falsch* □

6. In einem Integritätsring ist jedes Primideal auch maximales Ideal. *richtig* □ *falsch* □

7. Sei R ein faktorieller Ring und Q der Quotientenkörper von R. Ein Polynom aus $R[X]$ ist genau dann irreduzibel, wenn es in $Q[X]$ irreduzibel ist. *richtig* □ *falsch* □

8. Sei $L \supset K$ eine Körpererweiterung. Dann ist die Charakteristik von L gleich der Charakteristik von K. *richtig* □ *falsch* □

9. Die Körpererweiterung $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ besitzt keine Zwischenkörper. *richtig* □ *falsch* □

10. Für alle $f \in \mathbb{Z}_3(X)$ gilt $f + f + f = 0$. *richtig* □ *falsch* □

Aufgabe 2. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und seien M und N Normalteiler in G.

a) Zeigen Sie, dass $M \cdot N := \{ m \cdot n \mid m \in M, n \in N \}$ ein Normalteiler in G ist.

b) Zeigen Sie, dass $G = M \cdot N$ gilt, falls es keinen Normalteiler N' in G gibt mit $N \subsetneq N' \subsetneq G$ und falls gilt $M \not\subset N$.

Aufgabe 3. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) G besitzt nur die trivialen Untergruppen $\{ 1 \}$ und G.

(ii) Die Ordnung von G ist eine Primzahl.

Aufgabe 4. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und N ein Normalteiler in G. Beweisen Sie:

a) Falls der Index $k := [G : N]$ endlich ist, so gilt für alle $x \in G$:

$$x^k \in N \quad .$$

b) Es gibt keine echten Untergruppen von $(\mathbb{R}, +)$ mit endlichem Index.

Aufgabe 5. Seien R, S und T Ringe und $f : R \to T$ sowie $g : S \to T$ Ringhomomorphismen.
Es sei $F := \{ (r, s) \in R \times S \mid f(r) = g(s) \}$.

a) Zeigen Sie, dass F ein Unterring von $R \times S$ ist.

b) Beweisen Sie, dass $\mathrm{kern}(f) \times \{ 0 \}$ ein Ideal in F ist, und dass gilt:

$$F/(\mathrm{kern}(f) \times \{ 0 \}) \cong g^{-1}(f(R)) \quad .$$

c) Nun gelte $1 \neq 0$ in R, S und T, und sei S ein Integritätsring.

(i) Zeigen Sie, dass gilt $g^{-1}(f(R)) \neq \{ 0 \}$.

(ii) Ist $\mathrm{kern}(f) \times \{ 0 \}$ ein Primideal in F?

Aufgabe 6. Es seien die Polynome $f := X^3 - 3X^2 + 3X - 2$ und $g := X^3 + 2X^2 - 2X + 3$ aus $\mathbb{Z}[X]$ gegeben.

a) Gibt es Polynomen $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}[X]$ mit

$$f \cdot p_1 + g \cdot p_2 = 27X + 42 \quad ?$$

b) Ist das von f und g in $\mathbb{Q}[X]$ erzeugte Ideal (f, g) Hauptideal, Primideal, maximales Ideal?

Aufgabe 7.

a) Zerlegen Sie das Polynom $X^4 - 4$ in $\mathbb{Z}[X]$, in $\mathbb{Q}[X]$ und in $\mathbb{R}[X]$ in Produkte von irreduziblen Elementen.

b) Zeigen Sie, dass das Polynom $2X^{27} - 42X^{19} + 21X^3 + 14$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

Zusatz zu Aufgabe ...

Zusatz zu Aufgabe . . .

Zusatz zu Aufgabe ...

Zusatz zu Aufgabe ...