

Übung zur Algebra I, SS 2002

Kurze Lösungsskizze zu Blatt 13

Aufgabe 37. Es werden immer die Inklusionen

$$\{ \text{Euklidische Ringe} \} \subset \{ \text{Hauptidealringe} \} \subset \{ \text{faktorielle Ringe} \}$$

benutzt und dann aus der Vorlesung bekannte Sätze angewandt:

Richtig: a, c, f, g, h

Falsch: b, d, e

Aufgabe 38. (*Irreduzible Elemente in $\mathbb{R}[X]$*)

- a) Sei $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$, dann ist $0 = f(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$ und somit wegen $a_i \in \mathbb{R}$:

$$0 = \bar{0} = \overline{f(z)} = a_0 + a_1\bar{z} + \cdots + a_n\bar{z}^n = f(\bar{z}) .$$

- b) In $\mathbb{C}[X]$ zerfällt f in Linearfaktoren

$$f = a_n \cdot (X - z_1) \cdot (X - z_2) \cdot \cdots \cdot (X - z_n) .$$

Da nach a) für jede komplexe Nullstelle z auch $\bar{z}$ eine Nullstelle von f ist, lassen sich die z_i so ordnen, dass gilt

$$\begin{aligned} z_{2i} = \overline{z_{2i-1}} &\in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} && \text{für } i = 1, \dots, s , \\ z_{2s+i} &\in \mathbb{R} && \text{für } i = 1, \dots, n - 2s . \end{aligned}$$

(s Paare zueinander konj. Nullstellen und $n - 2s$ reelle Nullstellen.)

Nun ist $(X - z_i) \cdot (X - \bar{z}_i) = X^2 - (z_i + \bar{z}_i)X + z_i\bar{z}_i = X^2 - 2\operatorname{Re}(z_i)X + |z_i|^2 \in \mathbb{R}[X]$, und damit ist

$$\begin{aligned} f &= a_n \cdot (X - z_1) \cdot (X - \bar{z}_1) \cdot \cdots \cdot (X - z_{2s-1}) \cdot (X - \bar{z}_{2s-1}) \cdot (X - z_{2s+1}) \cdot \cdots \cdot (X - z_n) \\ &= f_1 \cdot \cdots \cdot f_s \cdot f_{s+1} \cdot \cdots \cdot f_{n-s} \end{aligned}$$

mit

$$f_i := \begin{cases} (X - z_{2i-1}) \cdot (X - \bar{z}_{2i-1}) & \text{für } i = 1, \dots, s , \\ (X - z_{s+i}) & \text{für } i = s + 1, \dots, n - s . \end{cases}$$

die gesuchte Zerlegung in $\mathbb{R}[X]$.

- c) Die irred. Elemente in $\mathbb{R}[X]$ sind wegen b) Polynome von Grad kleiner gleich 2.

- Die konstanten Polynome kommen nicht in Frage, da sie Einheiten darstellen.
- Die linearen Polynome sind aus Gradgründen irreduzibel.
- Von den quadratischen Polynomen sind genau diejenigen irreduzibel, die keine reellen Nullstellen besitzen (die anderen zerfallen in lineare Terme).

Aufgabe 39. (*Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten*)

- a) Aus $0 = f(\frac{a}{b}) = a_0 + a_1 \frac{a}{b} + \dots + a_n (\frac{a}{b})^n$ ergibt sich nach Multiplikation mit b^n

$$0 = a_0 b^n + a_1 b^{n-1} a + \dots + a_n a^n .$$

Also

$$\begin{aligned} -a_0 b^n &= a(a_1 b^{n-1} + \dots + a_n a^{n-1}) , \\ -a_n a^n &= b(a_0 b^{n-1} + \dots + a_{n-1} a^{n-1}) . \end{aligned}$$

Da a und b als teilerfremd vorausgesetzt waren, gilt $a \mid a_0$ und $b \mid a_n$.

- b) Sei $\frac{a}{b}$ eine rationale Nullstelle von f . Da der Leitkoeffizient von f gleich 1 ist, muß b nach a) 1 oder -1 sein und damit ist $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$.
- c) Wegen $a_0 = a_{42} = 1$ kommen nach a) und b) als rationale Nullstellen nur 1 und -1 in Frage. Von diesen beiden Zahlen ist nur die 1 eine Nullstelle.

Aufgabe 40. (*Irreduzibilitätskriterien*)

- a) Die Primzahl 3 erfüllt die Voraussetzungen des Eisensteinkriteriums. Damit ist das Polynom $2X^4 + 3X^2 + 12X + 6$ sowohl in $\mathbb{Z}[X]$ als auch in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel.
- b) Nach A38c) ist T irreduzibel und nach A37h) ist damit T auch Primelement im Euklidischen Ring $\mathbb{R}[T]$. Nun erfüllt das Primelement T die Voraussetzungen des Eisensteinkriteriums. Also ist $X^n - T$ über $\mathbb{R}[T]$ und über dem Quotientenkörper $\mathbb{R}(T)$ irreduzibel.
- c) Durch Reduktion modulo 3 ergibt sich aus $2X^3 + X^2 + 3X + 20$ das Polynom $-X^3 + X^2 - 1$. Dieses ist im Körper $\mathbb{Z}_3$ nullstellenfrei, d.h. es spaltet keinen Linearfaktor ab. Da mögliche Zerlegungen von $-X^3 + X^2 - 1$ aus Gradgründen immer einen Linearfaktor enthalten würden, der zu einer Nullstelle in $\mathbb{Z}_3$ führen würde, muß $-X^3 + X^2 - 1$ irreduzibel sein. Das Reduktionskriterium liefert dann die Irreduzibilität in $\mathbb{Z}[X]$ bzw. $\mathbb{Q}[X]$.