

Übungen zur Algebra II, WS 2002/03

Abgabe am Donnerstag, den 31.10.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 4. (*Primitive Körpererweiterungen*)

Seien L und M Teilkörper von \mathbb{C} mit $L \subset M$ und $[M : L] = 2$. Zeigen Sie, dass ein $a \in M$ existiert mit

$$M = L(a) \quad \text{und} \quad a^2 \in L \quad .$$

Aufgabe 5. (*Algebraische Körpererweiterungen*)

Sei K ein Körper und T eine Unbekannte über K . Wir betrachten den von T^n über K erzeugten Teilkörper $K(T^n)$ im Funktionenkörper $K(T)$. Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $K(T) \supset K(T^n)$ algebraisch ist und berechnen Sie den Grad $[K(T) : K(T^n)]$. Ist die Körpererweiterung $K(T^n) \supset K$ algebraisch?

(Hinweis: Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom von T über $K(T^n)$ gleich $X^n - T^n$ ist.)

Aufgabe 6. (*Einheitswurzeln*)

Es sei p eine Primzahl und $a := \exp(\frac{2\pi i}{p})$. Beweisen Sie:

$$[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = p - 1 \quad .$$

(Hinweis: Zeigen Sie, dass $X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + 1$ das Minimalpolynom von a über \mathbb{Q} ist.)