Übungen zur Algebra II, WS 2002/03

Abgabe am Donnerstag, den 7.11.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 7. *(Konstruierbare Zahlen)*
Welche der folgenden Zahlen α sind über $\mathbb{Q}$ konstruierbar? Geben Sie gegebenenfalls eine Folge von Körpererweiterungen $\mathbb{Q} \subset L_1 \subset \cdots \subset L_N$ an mit $[L_j : L_{j-1}] = 2$ und $\alpha \in L_N$.

a) $\alpha = \sqrt[4]{27}$,

b) $\alpha = \pi + \sqrt[3]{2}$,

c) $\alpha = \sqrt{27} + \sqrt[3]{29}$,

d) $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{7}$.

Aufgabe 8. *(Nicht konstruierbare Zahlen vom Grad 4)*
Es sei das Polynom $f = X^4 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ gegeben. Zeigen Sie:

a) f ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$ und besitzt keine reellen Nullstellen.

b) Für die Linearfaktorzerlegung $f = (X - \alpha)(X - \overline{\alpha})(X - \beta)(X - \overline{\beta})$ in $\mathbb{C}[X]$ gilt:

$$\begin{aligned} \alpha + \overline{\alpha} + \beta + \overline{\beta} &= 0 & \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} + (\alpha + \overline{\alpha})(\beta + \overline{\beta}) &= 0 \\ \alpha\overline{\alpha}(\beta + \overline{\beta}) + \beta\overline{\beta}(\alpha + \overline{\alpha}) &= -1 & \alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta} &= 1 \ . \end{aligned}$$

c) Die Zahl $\gamma = \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta}$ ist Nullstelle des Polynoms $X^3 - 4X - 1$.

d) Keine der Zahlen $\alpha, \overline{\alpha}, \beta, \overline{\beta}, \gamma$ ist konstruierbar über $\mathbb{Q}$.

Folgern Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha) \supset \mathbb{Q}$ keine echten Zwischenkörper besitzt.

Aufgabe 9. *(Zerfällungskörper)*
Bestimmen Sie Zerfällungskörper $K_i \supset \mathbb{Q}$ der Polynome f_i und ermitteln Sie die Grade der Körpererweiterungen $[K_i : \mathbb{Q}]$.

a) $f_1 = X^2 + 2X + 2$,

b) $f_2 = X^3 - 1$,

c) $f_3 = X^3 - 2$.